Chap 4 : Les Nombres Complexes

Approche Historique :

Au début du XVIème siècle, des mathématiciens italiens de la Renaissance travaillent sur la résolution des équations du 3ème degré.
En 1545, Jérôme Cardan publie un livre dans lequel il propose une formule donnant une solution de l'équation du 3ème degré : $x^3 = px + q$.

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}.$$

A la fin du XVIème siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$. Il obtient littéralement :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}.$$

Cette écriture n'a *a priori* pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$.
Mais Bombelli va plus loin. Il remarque, en utilisant les règles usuelles de calcul que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \text{ et } (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}.$$

Si bien qu'il obtient finalement $x = 2 + 11\sqrt{-1} + 2 - 11\sqrt{-1} = 4$.

Or $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$.

Grâce à ces nombres imaginaires, Bombelli généralise la méthode de Cardan.
Mais ce nombre $\sqrt{-1}$, souvent qualifié d'impossible suscite de nombreuses polémiques.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus. C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes…

I. Introduction

En 1637, Descartes propose l'appellation de « nombres imaginaires », mais c'est Gauss en 1831 qui le premier les nomme les « nombres complexes ».
Euler, déclarant que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit à une contradiction de la définition, introduit la notation **i** (comme imaginaire) en 1777 et ce nombre vérifie $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ apparaît alors : ce sont les nombres de la forme $a + ib$, avec *a* et *b* réels. Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ sont conservées.
Les nombres imaginaires prennent alors leur statut officiel de nombres, avec notamment une représentation géométrique de chaque nombre $x + iy$ avec *x* et *y* réels par le point du plan de coordonnées $(x; y)$.

Ils ont notamment servi pour formaliser la théorie de la relativité d'Einstein (1905). A notre niveau, ils sont utiles en géométrie et pour la résolution toutes les équations.

II. Généralités

1) Forme algébrique

Théorème : Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ d'éléments appelés ***nombres complexes*** tq :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ est muni des mêmes opérations (+ et *) que $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté ***i*** tq $i^2 = -1$
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière ***unique*** sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont réels.

Ex : 2 + 3i ; -5i ; 6 sont des nombres complexes.

Définitions : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b réels.

- L'écriture $a + ib$ est la forme *algébrique* de z.
- Le réel a est appelée *partie réelle* de z et on note a = Re(z)
- Le réel b est appelé la *partie imaginaire* de z et on note b = Im(z)

Ex : Si z = 2 + 3i alors 2 + 3i est l'écriture algébrique de z, Re(z) = 2 et Im(z) = 3
Faire faire les autres.

Remarque :
Lorsque Re(z) = 0 alors on dit que z est un imaginaire pur
Lorsque Im(z) = 0, z est réel.
Tout nombre réel a s'écrit de manière unique sous la forme a = a + 0i

Corollaire du théorème :

Deux nombre complexes z et z' sont égaux ssi ils ont la même partie réelle et même partie imaginaire.
En particulier : z = 0 ssi Re(z) = Im(z) = 0

2) Représentation géométrique

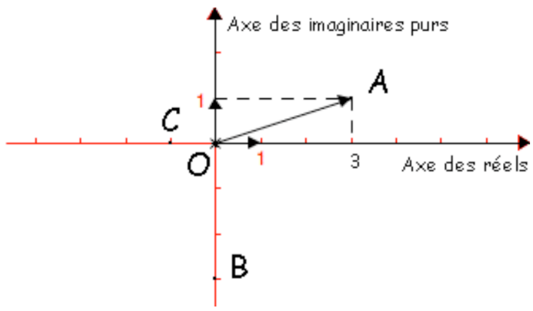
Soit $(O;\vec{u};\vec{v})$ un repère orthonormal direct du plan.

Définition :

A tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M du plan de coordonnées (a ;b), appelé ***image*** de z et noté M(z) ou M(a ;b).
A tout point M du plan de coordonnées (a ;b) on associe le complexe $z = a + ib$ appelé ***affixe*** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et noté aff(M).

Ex : A z = 2 – 5i correspond le point M (2 ;5) et réciproquement.
Si z = -5 – 2i et M est l'image de z alors $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ est le vecteur image de M.

Exercice : Placer les points A, B et C d'affixes respectives 3 + i ; -3i ; -1 dans un repère orthonormé direct du plan et tracer le vecteur $\overrightarrow{OA}$.
Quelle est l'affixe des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $-\vec{u}$, $-\vec{v}$?



Remarques :

- Si a = 0 alors z = ib donc M est sur l'axe des ordonnées, appelé axe des imaginaires purs.
- Si b = 0 alors z est réel et M est sur l'axe des abscisses, appelé axe des réels.
- On a ainsi identifié le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct et l'ensemble $\mathbb{C}$, ce qui justifie l'appellation ***plan complexe*** de ce type de plan.
- Cette identification permet d'affirmer que l'on ne peut pas prolonger dans $\mathbb{C}$ la relation d'ordre $\leq$ définie sur $\mathbb{R}$, car cela reviendrait à comparer deux points du plan ou deux vecteurs, ce qui n'a pas de sens.

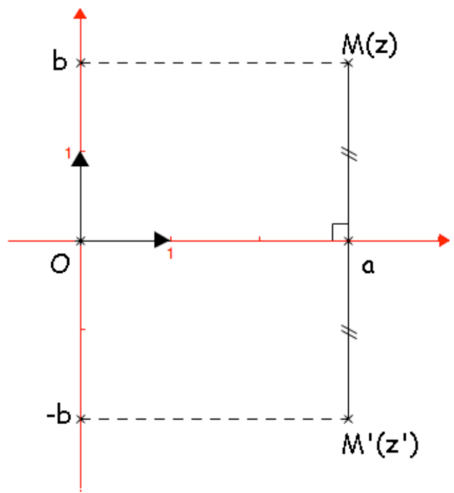
Définition :

On appelle nombre complexe ***conjugué*** d'un nombre complexe z = a + ib le nombre complexe a – ib. On note $\overline{z} = \overline{a+ib} = a - ib$.

Ex : $\overline{1+i}$; $\overline{2i}$; $\overline{3}$; $\overline{1-i}$

Remarque :

- $\overline{\overline{z}} = z$. On dit que z et $\overline{z}$ sont deux nombres complexes conjugués.
- Le point M'($\overline{z}$) est le symétrique de M(z) par rapport à l'axe des abscisses. En effet, un nombre complexe et son conjugué ont la même partie réelle (abscisse) et des parties imaginaires opposées (ordonnées).



- z est réel ssi $\overline{z} = z$
- z est imaginaire pur ssi $\overline{z} = -z$

Exercices : D n°13-14 p 298 – n°11 à l'oral, 12 en interro et 15 à l'écrit

III. Opérations dans $\mathbb{C}$

1) Addition et Multiplication

Définitions :

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
La somme de z et z' est le nombre complexe : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
Le produit de z et z' est le nombre complexe $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Propriété :

On effectue la somme et le produit dans $\mathbb{C}$ en appliquant les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant i^2 par -1.

Exemples :
Soit z = 2 + 3i et z' = 4 + 5i. Déterminer la forme algébrique des nombres z + z' et zz'.
Trouver l'opposé de z = a + ib, noté -z.

Rq : Dans $\mathbb{C}$ on a les mêmes identités remarquables que pour les nombres réels, et la formule du binôme vue au chapitre du dénombrement est encore valable.

Propriété :

Tout nombre complexe z non nul admet un inverse unique dans $\mathbb{C}$ noté $\frac{1}{z}$.

Preuve : Existence
Soit z = a + ib avec a et b réels, un nombre complexe non nul.
Alors a ou b est différent de 0 donc $a^2 + b^2 \neq 0$. On a :

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+b^2}(a+ib)(a-ib) = 1$$

$$\Leftrightarrow (a+ib)\left[\frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)\right] = 1 \Leftrightarrow (a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right) = 1$$

Donc le nombre complexe z admet un inverse.

Conséquences :

- Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul :
  Si z = 0 ou z' = 0 alors zz' = 0.
  Si zz' = 0 alors $zz' \times \frac{1}{z'} = 0 \Rightarrow z = 0$.
- On peut alors prouver l'unicité de l'inverse :
  Si zz' = 1 et zz'' = 1 alors zz' - zz'' = 0 et donc z(z' –z'') = 0. D'où z' = z''.

Ex : Trouver l'inverse de $\frac{1}{1+i}$ + Fiche n°1 + D n°25 p 299

Définition :

Soient z et z' deux nombres complexes avec z' non nul. Le quotient de z par z' est le nombre complexe $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Ex : Trouver l'écriture algébrique de $\frac{1+i}{2+3i}$ + D n°27 p 300

Application au conjugué : Propriété

Pour tout complexe z de forme algébrique a + ib on a : $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$

$z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$

$z\overline{z}=a^2+b^2$

Pour tout nombres complexes z et z' et pour tout entier relatif n on a :

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$

$\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$

si $z'\neq 0$ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

si $z\neq 0$ $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n$

Preuve : calcul et D n°45 p 301

Exercice : fiche n°4

2) Interprétation géométrique

Pour le reste du chapitre, on munit le plan complexe du repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Propriété :

Soient M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives z et z'. Soit S un point du plan complexe. Le point S a pour affixe z + z' ssi $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$.

Preuve :

Soit z = a + ib et z' = a' + ib', avec a, b, a', b' réels.

Alors z + z' = (a + a') + i (b + b'). Donc S étant un point du plan complexe on a :

S a pour affixe z + z' $\Leftrightarrow$ S a pour coordonnées (a + a' ; b + b')

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OS}$ a pour coordonnées (a + a' ; b + b')

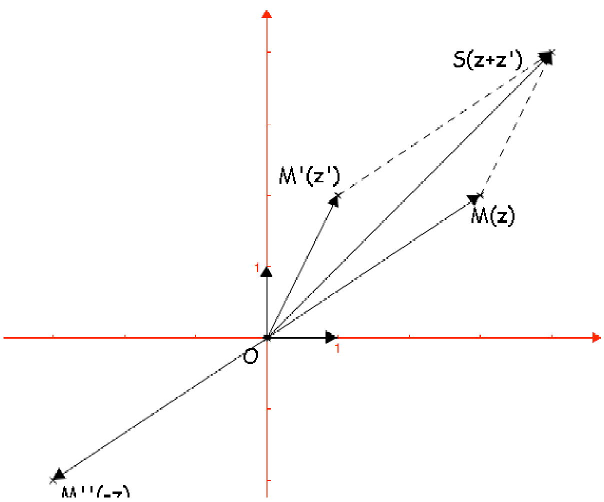
$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OS}=(a+a')\vec{u}+(b+b')\vec{v}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OS}=a\vec{u}+b\vec{v}+a'\vec{u}+b'\vec{v}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$

Remarques :

- Soient M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives z et –z. O a pour affixe z + (-z) = 0 ; donc d'après ce qui précède $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OO}=\vec{0}$. Donc M'(z) est le symétrique de M(z) par rapport à O.



Propriété :

Soient M un point du plan complexe d'affixe z et k un réel non nul. Soit P un point du plan complexe. Le point P a pour affixe kz ssi $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OM}$. P est donc l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.

Propriété :

Soient A et B deux points du plan complexe, d'affixes z_A et z_B et I le milieu de $[AB]$.

L'affixe du point I est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ et l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $Z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Preuve : Le milieu I de $[AB]$ est le point tq $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Exercices : D n°24 p 298, n° 18 en interro – n°43 et 47 p 301

IV. Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels.

Introduction orale :

L'équation $x + 7 = 6$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle en a dans un ensemble plus grand : $\mathbb{Z}$ (x = 1).

De même l'équation $3x = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, alors que dans un ensemble plus grand, $\mathbb{Q}$ par exemple, il y en a une (x = 1/3). Et puis l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ pour en trouver.

Bref, quand une équation n'a pas de solution, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Actuellement, l'ensemble numérique le plus grand que nous connaissions est $\mathbb{R}$. Pourtant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$ …

Grâce à cet élément imaginaire i, cette équation possède des solutions. On va même voir bien plus…

Faire l'exercice D n°37 p 300 (+ n°26 et fiche n°2)

Puis fiche d'activité ci-dessous.

Activité sur la résolution des équations du second degré

1) Equation du type $x^2 = a$ où a est un réel

- Rappeler les solutions l'équation $x^2 = a$ dans le cas où $a \geq 0$.

- On suppose que $a < 0$. Vérifier que $a = \left(i\sqrt{-a}\right)^2$.

- En déduire que l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions complexes que l'on précisera.

Théorème :

L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:

- Si $a \geq 0$, ce sont les réels :

- Si $a < 0$, ce sont les nombres complexes :

Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$x^2 = -3$ $\qquad z^2 + \dfrac{3}{4} = 0$ $\qquad z^2 = \cos^2\theta - 1$ $\qquad x + \dfrac{1}{x} = 0$

2) Equation du type $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$

On considère le discriminant $\Delta = b^2-4ac$.

- Rappeler les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) lorsque $\Delta \geq 0$.

On rappelle que l'équation $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) peut s'écrire de manière équivalente :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

- On suppose que $\Delta < 0$. Vérifier que $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.

- En déduire que l'équation ci-dessus possède deux solutions complexes que l'on précisera.

Théorème :

L'équation $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:

- Si $\Delta \geq 0$, ce sont les réels :

- Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

A retenir : Dans $\mathbb{C}$ on peut toujours obtenir la factorisation suivante :
$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$ où z_1 et z_2 sont les racines du polynôme az^2+bz+c

Applications : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$2z^2-3z+4=0 \qquad x^2-2x+2=0 \qquad 2z^4+z^2-10=0 \qquad z^3-z^2+z-1=0$$

V. Module et arguments d'un nombre complexe

1) Module

Définition :

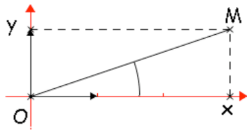
On appelle ***module*** d'un nombre complexe z = a + ib le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Rq : Lorsque z = a est réel, alors le module de z est égal à la valeur absolue de a, ce qui justifie la notation.

Exemples : $|3+2i|$, $|i|$, $|5|$, $|-3+2i|$

Propriété :

Soit z un nombre complexe et :
- Soit M(a ;b) le point d'affixe z, alors $OM = |z|$.
- Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur d'affixe z, alors $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z| = |z_B - z_A|$.



Preuve : (les faire chercher) Pythagore

Exercice : n°5 de la fiche

Propriété :

Pour tout nombre complexe z on a :

$|z| = 0 \iff z = 0$ $\qquad |z|^2 = z\overline{z}$ $\qquad |z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$

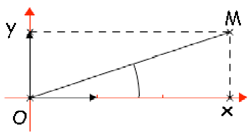
Preuve : calculs (à faire soi-même)

Exercices : n°3 - 9 de la fiche

2) Arguments

Définition :

On appelle **argument** d'un nombre complexe z *non nul* toute mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ où M est le point d'affixe z. On le note $\theta = \arg(z)$.



Rq : Si θ est un argument de z, les autres arguments de z sont les angles de la forme $\theta + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

L'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi[$ est l'***argument principal***. On écrit $\arg(z) = \theta \ [2\pi]$ (se lit « modulo 2π »)

Exemples : arg(i) ; arg(1) ; arg(-i) ; arg(-1) ; arg(1 + i)

__**Cas particuliers importants :**__ ex6 de la fiche

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(z = 0 \text{ ou } \arg(z) = 0 \ [\pi]\right)$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(z = 0 \text{ ou } \arg(z) = \frac{\pi}{2} \ [\pi]\right)$$

Propriété :

Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur d'affixe z, alors $\arg(z) = \arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$.

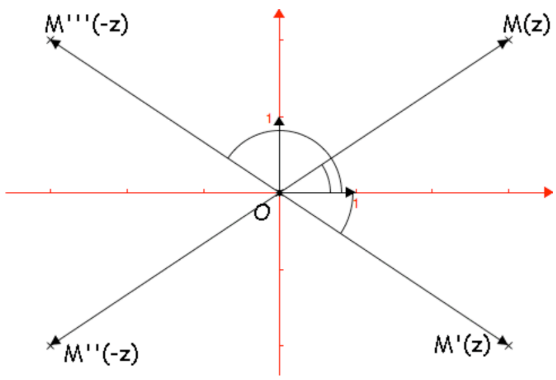
Propriété :

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$ on a :

$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \ [2\pi]$ et $\arg(-z) = \pi + \arg(z) \ [2\pi]$

Preuve : (les faire chercher) Soient M le point d'affixe z, M' le point d'affixe $\overline{z}$ et M'' le point d'affixe -z. Alors :

- M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels, donc $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM'}\right) = -\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) \ [2\pi]$
- M'' est le symétrique de M par rapport à O, donc $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM''}\right) = \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) + \pi \ [2\pi]$.



3) Forme trigonométrique

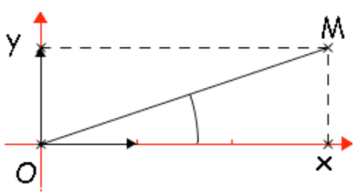
Propriété et définition :

Soient z un nombre complexe non nul, r un réel strictement positif et θ un réel.
Z a pour module r et pour argument θ ssi $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
Cette nouvelle écriture s'appelle ***écriture trigonométrique*** de z.

__**La forme algébrique de z :**__

z = a + ib

avec $a = r\cos\theta$
et $b = r\sin\theta$



__**Une forme trigonométrique de z :**__

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

avec $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{r}$$

Exemple : Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z de module $\sqrt{5}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$.

Attention : $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ n'est pas une forme trigonométrique.

Propriété :

> Deux nombres complexes non nuls sont égaux ssi ils ont même module et des arguments égaux à un multiple de 2π près.

Preuve : Soient M et M' les points d'affixes resp z et z'.
Si z = z' alors OM = OM' et $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi]$. D'où r = r' et $\theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Réciproque évidente.

Propriété :

> Pour tout nombres complexes z et z' non nuls :
> - $|z.z'| = |z|.|z'|$ et $\arg(z.z') = \arg z + \arg z'\ \ [2\pi]$
> - $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\frac{1}{z} = -\arg z\ \ [2\pi]$
> - Si $z' \neq 0,\ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\frac{z}{z'} = \arg z' - \arg z\ \ [2\pi]$
> - Si $z \neq 0,\ |z^n| = |z|^n$ et $\arg z^n = n\arg z\ \ [2\pi]$

Preuve : Soient z et z' deux nombres complexes non nuls, d'écriture trigonométrique $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

$$zz' = r(\cos\theta + i\sin\theta).r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

Donc $zz' = rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right]$

$$zz' = rr'\left[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right]$$

Comme rr' > 0 l'écriture précédente est une forme trigonométrique du produit zz'. Par identification, on obtient ce que l'on veut.

Pour les modules, utiliser $|z|^2 = z\bar{z}$. Pour les arguments, on a : $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\frac{1}{z}\ \ [2\pi]$ et $\arg 1 = 0$. D'où ce qu'on veut.
Même principe le 3$^{\text{ème}}$ point. Récurrence pour le 4$^{\text{ème}}$ point.

Exercice : Déterminer une forme trigonométrique de $\frac{1}{1+i}$ et de $(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)$

4) Interprétation géométrique

Propriété :

Soit A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D :

$$\left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right| = \frac{CD}{AB} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \ [2\pi]$$

Preuve : Le module d'un quotient est le quotient des modules et comme $|z_D - z_C| = CD$ et $|z_B - z_A| = AB$, on obtient ce qu'on veut.

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u},\overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) \ [2\pi]$$

Conséquences :

- Les points A, B, C sont alignés ssi $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = 0 \ [\pi]$ ssi $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ est réel.
- Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ssi $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \ [\pi]$ ssi $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

Caractérisation des cercles et des médiatrices :

- Cercle C de centre $\Omega(w)$ et de rayon R : $M(z) \in C \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow |z - w| = R$
- Médiatrice Δ de $[AB]$: $M(z) \in \Delta \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$

Exercices 7 – 8 – 10 et 11 de la fiche.