Dénombrement

Définition :

Soit E un ensemble fini. On appelle *cardinal* de E son nombre d'éléments. On note card(E).

Dans tout le chapitre, E désigne un ensemble fini non vide de cardinal n.

I. Diagrammes, tableaux et arbres

1) Diagrammes

Voir l'activité. Etablir la formule : $\boxed{card(E \cup F) = cardE + cardF - card\left(E \cap F\right)}$

Exercice n°1 DM n°2

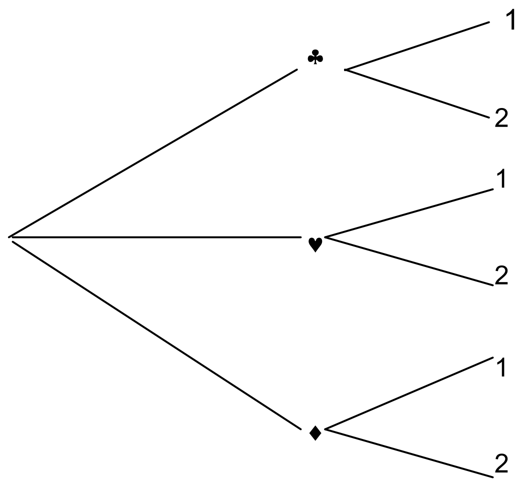
2) Tableaux, arbres

Définition :

Etant donnés deux ensembles E et F, on appelle produit cartésien E x F, l'ensemble des couples (a ; b) avec a ∈ E et b ∈ F.

Exemple : Soit E = {♣ ; ♥ ; ♦} et F = {1 ; 2}.
On peut écrire tous les éléments de E x F dans un tableau à double entrée ou utiliser une disposition en forme d'arbre.

E F	♣	♥	♦
1	(♣ ; 1)	(♥ ; 1)	(♦ ; 1)
2	(♣ ; 2)	(♥ ; 2)	(♦ ; 2)



Le nombre d'élément de $E \times F$ est : $card(E \times F) = 6 = cardE \times cardF$

Chaque chemin de l'arbre correspond à un élément de l'ensemble $E \times F$

Propriété :

Si E et F sont des ensembles finis, le nombre d'éléments de E x F est égal au nombre d'éléments de E multiplié par le nombre d'éléments de F.
C'est-à-dire que l'on a : $card(E \times F) = cardE \times cardF$
L'ensemble E x E est noté E^2 et on a $card(E^2) = [card(E)]^2$

Remarque : on peut généraliser à *p* ensembles cette propriété.

$$card(A_1 \times .... \times A_p) = cardA_1 \times ..... \times cardA_p$$

$$cardA^p = n^p$$

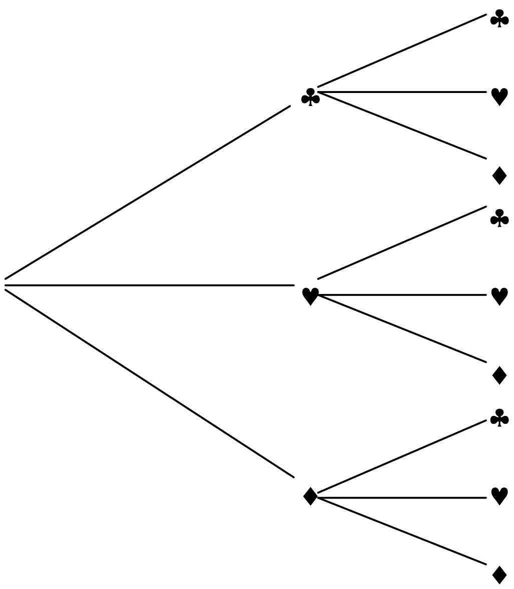
Exercices : n°21 p 265 (resto) + n°1-2 fiche 1

II. Permutations

Définition :

On appelle *permutation* sur E toute n-liste des éléments de E (liste à n éléments).

Exemple : Si $E = \{a;b;c;d\}$, une permutation de E est $(b;c;a;d)$, mais pas $(d;a;b;b)$.
Votre numéro de téléphone est-il une permutation de l'ensemble des dix chiffres ?
Exemple : Si E = {♣ ; ♥ ; ♦}, on peut écrire toutes les permutations des éléments de E en utilisant un arbre.



On obtient 6 permutations.

Propriété :

Le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n est $n \times (n-1) \times .... \times 2 \times 1$.

Idée de preuve : une permutation de E étant un n-uplet, on a n facons de choisir le 1er élément, (n – 1) de choisir le 2ème, etc jusqu'au dernier de la liste où on n'a plus qu'un élément, donc 1 choix possible.

Définition :

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle n* et on note $n!$ l'entier naturel égal au produit de tous les entiers naturels de 1 à n.

$$n! = 1 \times 2 \times .... \times (n-1) \times n$$

Par convention on a $0! = 1$.

Exemples: Vous êtes 26 élèves dans cette classe. On s'intéresse à l'ordre dans lequel vous entrez dans la salle (un par un). Déterminer le nombre d'ordres de passage possibles ?

Remarques :

Les quotients de factorielles se simplifient toujours : $\dfrac{9!}{12!} = \dfrac{1}{10 \times 11 \times 12}$

Les calculatrices scientifiques permettent de calculer $n!$ pour un nombre entier n "raisonnable" (sur TI 89 : Menu Maths-Probabilités).

Exercice : n°3 fiche

III. Combinaisons

Voir activité 2. Soit $0 \le p \le n$.

Définition :

Une *combinaison* à p éléments de E, est une partie de E formée de p éléments (sans ordre et sans remise).

Notation :

Le nombre de combinaisons à p éléments de E est noté $\binom{n}{p}$ et se lit « p parmi n ».

On a : $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad \text{(admis)}$$

Remarque : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ + touche sur la calculatrice

Exemples :

Compléter : $\binom{4}{0} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{1} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{2} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{3} = \ldots\ldots$, $\binom{4}{4} = \ldots\ldots$.

Donner toutes les combinaisons à deux éléments parmi les 4 de l'ensemble $E = \{1;2;3;4\}$.

N°98 p 276 (belote)

N°18 p 265 à l'oral

Exercices : n°4-5-6 fiche + D n°30-32 p 266 (tiroirs et digicode)

Propriétés :

Pour tout couple d'entier naturel n et p tels que $0 \le p \le n$ on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Pour tout couple d'entier naturel n et p tels que $0 \le p \le n-1$ on a

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \qquad \text{(formule de Pascal)}$$

Preuve : raisonnement ou calcul

Formule de Pascal : Considérons un ensemble F ayant (n + 1) éléments. Alors on sait que F contient $\binom{n+1}{p+1}$ parties à p + 1 éléments.

On choisit dans F un élément particulier *a* et on appelle E l'ensemble F privé de *a*. ($card(E) = n$).

On considère alors les parties de F à p + 1 éléments contenant *a* et les parties ne contenant pas *a* :

- Celles qui contiennent *a*, contiennent aussi *p* éléments différents de *a*, c'est-à-dire p éléments de l'ensemble E. Il y en a donc $\binom{n}{p}$.

- Celles qui ne contiennent pas a, sont des parties à p + 1 éléments de l'ensemble E. Il y en a donc $\binom{n}{p+1}$.

En tout dans F on obtient $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}$ parties de F à p + 1 éléments. CQFD

Conséquence :Triangle de Pascal

On peut calculer les $\binom{n}{p}$ de proche en proche à l'aide du tableau.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	…	$p-1$	p	…	$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
…											
$n-1$	1	$n-1$					$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$		1	
n	1	n						$\binom{n}{p}$		n	1

Formule du binôme :

Pour tous nombres réels a et b et pour tout entier naturel n non nul,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Preuve : Par récurrence ou voir livre p 252

Application : Nombre de parties de E (DM)

Exercices : Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. Développer $(x+2)^5$ et $(1+\sqrt{2})^4$

Méthodes :

- Arbres ou Combinaisons : Les éléments peuvent-ils être répétés ? Les éléments sont-ils ordonnés ?

Critères	**Avec Répétition**	**Sans répétition**
Avec Ordre	Arbres (p-listes)	Arbres (arrangements)
Sans Ordre	Hors programme	Combinaisons

- Addition ou Multiplication :
  Si les différentes étapes sont reliées par un « et », on multiplie
  Si les différentes étapes sont reliées par un « ou » on additionne.