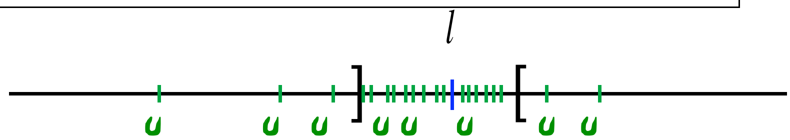
Chapitre 2: Limites de suites et de fonctions

I. Limites de suites

1. Rappel: Limite finie

Définition :
Soit (u_n) une suite et l un nombre réel.
On dit que la suite (u_n) converge vers l si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit aussi que la suite (u_n) a pour limite l, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.



Remarque :
Cela revient à dire que :
- Tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite sauf peut-être un nombre fini d'entre eux.
- Le terme général u_n de la suite est aussi proche que l'on veut de l à partir d'un certain rang.

Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{3+n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 2$ (à faire trouver)

Contre-exemple : La suite (u_n) de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite. On dit qu'elle diverge.

Théorème :
La suite (u_n) converge vers 0 ssi $(|u_n|)$ converge vers 0.

Lemme : Tout intervalle ouvert contenant l contient aussi un intervalle ouvert centré en l, ie de la forme $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$, où ε est un réel strictement positif.

Preuve : dessin + explications orales (donner un exemple)

Preuve (admise) :
Soit $]\beta_1;\beta_2[$ un intervalle contenant 0. D'après le lemme, il existe $\varepsilon > 0$ tq $]-\varepsilon;\varepsilon[\subset]\beta_1;\beta_2[$.
$\Rightarrow$: Si (u_n) converge vers 0, alors l'intervalle $]-\varepsilon;\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un rang n_0.
Donc pour $n > n_0, |u_n| < \alpha$ et $|u_n|$ est aussi dans l'intervalle $]-\varepsilon;\varepsilon[$ à partir du même rang et donc dans $]\beta_1;\beta_2[$. $(|u_n|)$ converge bien vers 0.

$\Leftarrow$: Si $(|u_n|)$ tend vers 0 alors il existe un rang n_0 à partir duquel $]-\varepsilon;\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite $(|u_n|)$, et donc aussi dans l'intervalle $]\beta_1;\beta_2[$, ce qui signifie que (u_n) converge vers 0.

***Théorème* :** La suite (u_n) converge vers l ssi la suite $(u_n - l)$ converge vers 0.

Exercices : exo 1 de la feuille n°1

Déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{3n^2+n}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Rédaction : On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{n^2(3+\frac{1}{n})}{n^2} = 3 + \dfrac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.(R p55)

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2(-1)^n - 4n + 3}{n+7}$. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.(R p 69)

Théorème :   Si une suite (u_n) converge, sa limite est unique.

Preuve (non exigée) :
Supposons que (u_n) ait deux limites $l \neq l'$. Alors il existe deux intervalles ouverts I et J disjoints contenant respectivement l et l'.
Comme (u_n) converge vers l, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_1. De plus (u_n) converge vers l', donc l'intervalle J contient tous les termes de la suite à partir d'un rang n_2 .
Donc pour $n > \max(n_1;n_2)$, tous les termes de la suite sont dans les intervalles I et J. Ceci est impossible car les intervalles sont disjoints.
Donc $l = l'$ et la limite est unique.

2. Limite infinie

Définition :
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ ssi tout intervalle ouvert de la forme $]\lambda:+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_0 (dépendant de λ). On dit encore que la suite diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ ssi la suite $(-u_n)$ tend vers $+\infty$. On dit aussi que la suite diverge vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque : dire que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ revient à dire que

- Tout intervalle de la forme $]\lambda:+\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf pê un nombre fini.
- Son terme général u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang.

Exemples : Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$. $\lim\limits_{n \to +\infty} -\sqrt{n} = -\infty$

Exercices : DTS n° 29-30-31 p 60. + exo 2 de la feuille n°1

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = n(-1)^n$. Démontrer qu'elle diverge.

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n - \cos(n^2)$. Etudier $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. (R p 55)

Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2 + \sin n$ diverge. (R p 69)

II. Limites de fonctions

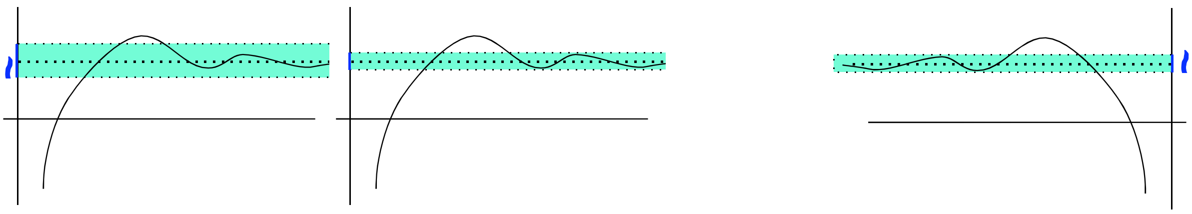
1. Limite finie en l'infini

Définition :

Soit $l \in \mathbb{R}$ et f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle de la forme $]\lambda;+\infty[$, avec λ réel.

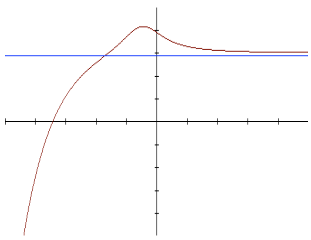
On dit qu'une fonction f ***tend vers*** l ***quand*** x ***tend vers*** $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand (resp. $-x$ assez grand).

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$).



Interprétation graphique : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Soit d la droite d'équation $y = l$. Si deux points M et N, avec $M \in C_f, N \in d$, ont la même abscisse x alors $MN = |f(x) - l|$. Dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ signifie que la distance MN est arbitrairement petite pour tout x assez grand.



Asymptote horizontale :

$x \to \infty$ et $f(x) \to b$

On dit alors que la droite d'équation $y = l$ est ***asymptote horizontale*** à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Exemple : $f(x)=\dfrac{2+x}{x}$, $g(x)=\dfrac{3x+5}{2x+1}$ ATTENTION aux valeurs interdites

Rédaction (hors programme): un tableau de valeur permet de conjecturer la limite.

Il semble naturel de conjecturer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. On remarque que $\forall x\neq 0 : f(x)=1+\dfrac{2}{x}$.

Soit un réel $\varepsilon>0$ fixé et l'intervalle $V=\left]1-\varepsilon;1+\varepsilon\right[$.

On cherche un réel A, dépendant de ε, tq pour tout réel x :

$x>A$ **implique** $f(x)\in V$, ie $1-\varepsilon<1+\dfrac{2}{x}<1+\varepsilon$.

Sur $\left]0;+\infty\right[$, on a toujours $1-\varepsilon<1+\dfrac{2}{x}$.

Il suffit donc de trouver A tq pour $x>A$ on ait : $1+\dfrac{2}{x}<1+\varepsilon$

Or, sur $\left]0;+\infty\right[$, cette inéquation équivaut à $x>\dfrac{2}{\varepsilon}$.

On a trouvé un $A>0$ $\left(A=\dfrac{2}{3}\right)$ tq l'on ait $1-\varepsilon<1+\dfrac{2}{x}<1+\varepsilon$.

Ceci prouve le résultat $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Idem en $-\infty$.

Exercices: DTS p47 A + exo 3 de la feuille n°1

Déterminer les limites des fonctions suivantes en $-\infty$ et $+\infty$ (R n°1 p 34) :

$$g(x)=\frac{-3x+1}{6x-1} \qquad\qquad h : x\mapsto \frac{x^2+2x+9}{-2x^5}$$

2. Limite infinie en l'infini

Définition :

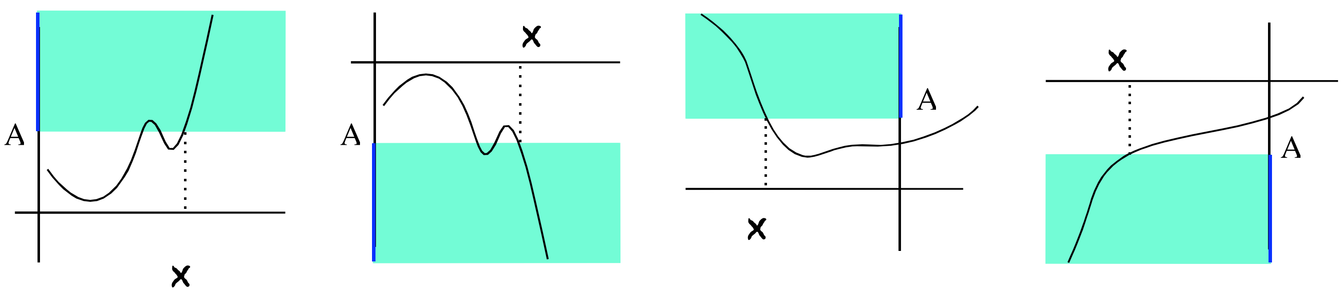
Soit f une fonction dont l'ensemble de définition contient un intervalle de la forme $\left]\lambda;+\infty\right[$, avec λ réel.

On dit qu'une fonction f ***tend vers*** $+\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi tout intervalle $\left]A;+\infty\right[$ (A réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand (resp. $-x$ assez grand).

On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$).

On dit qu'une fonction f ***tend vers*** $-\infty$ ***quand*** x ***tend vers*** $+\infty$ (resp. $-\infty$) ssi tout intervalle $\left]-\infty;A\right[$ (A réel) contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand (resp. $-x$ assez grand).

On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$).



(faire reconnaître et noter le titre des graphes)

Exemples *(regarder sur la calculatrice graphique et conjecturer)* :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ pour tous les entiers n pairs et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ pour tous les entiers n impairs

Exercice : exo 4 de le feuille n°1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 + x^2$.

- Déterminer les valeurs de $f(1), f(10), f(100), f(1125)$.
- On considère l'intervalle $]100;+\infty[$. Démontrer que pour $x > 10$, $f(x) \in \,]100;+\infty[$.
- On considère un intervalle $]A;+\infty[$ avec $A > 0$, mq pour $x > \sqrt{A}$, tous les $f(x)$ sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$.
- Que peut-on en conclure ?

Exercices : D p51 + exo 5 de la feuille n°1

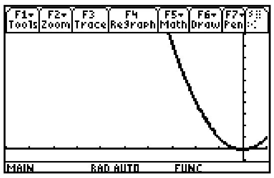
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^3 - 2x - 4$ Déterminer les limites en $\pm\infty$.

Exercice : Conjecturer des limites à partir des graphes des fonctions :

La fonction $f : x \mapsto x^2$

Et autres ci-dessus ou classiques.



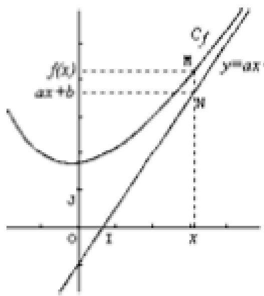
Interprétation graphique : Soient $a, b \in \mathbb{R}$

Soit d la droite d'équation $y = ax + b$. Soit x un réel.

Le point $M \in C_f$ d'abscisse x a pour ordonné $f(x)$.

Le point $N \in d$ d'abscisse x a pour ordonnée $ax + b$.

$MN = |f(x) - (ax + b)|$ est la distance entre ces deux points.



Définition :

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - (ax + b)| = 0$ (resp $x \to -\infty$), alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

Exemple : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 2x - 3 - \dfrac{4}{x}$.

Alors $f(x) - (2x - 3) = -\dfrac{4}{x}$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} -\dfrac{4}{x} = 0$. Donc la droite Δ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

De plus, pour tout réel $x < 0$, $-\dfrac{4}{x} > 0$ et pour tout réel $x > 0$, $-\dfrac{4}{x} < 0$.

Donc la courbe C est située au-dessus de la droite Δ sur $]-\infty;0[$ et au-dessous de Δ sur $]0;+\infty[$.

+ suite : exo 6 de la feuille n°1

Exercice : exo 7 de la feuille n°1

Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+4}{x+1}$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

- Déterminer trois réels a,b,c tq $\forall x\in[0;+\infty[,\ f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$.
- Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x+1$ est asymptote à C.
- Etudier la position relative de la droite Δ et de la courbe C.

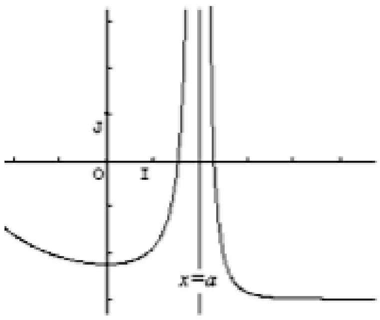
3. *Limite finie ou infinie d'une fonction en* a $(a\in\mathbb{R})$

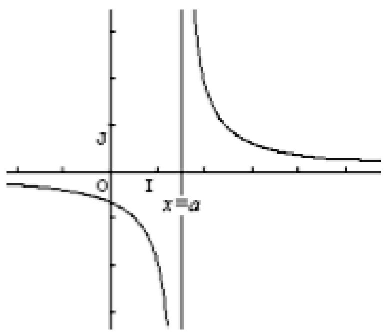
Soit $a\in\mathbb{R}$ et I un intervalle contenant a ou dont a est une borne, f une fonction définie dans I sauf peut-être en a.

Définition :
On dit que la fonction f ***tend vers*** l ***quand*** x ***tend vers*** a ssi tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x dans I et assez proche de a.
Remarque : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ équivaut à $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=l$.

Définition :
On dit que la fonction f ***tend vers*** $+\infty$ ***(resp.*** $-\infty$***) quand*** x ***tend vers*** a ssi tout intervalle $]\lambda;+\infty[$ (resp. $]-\infty;\lambda[$) $(\lambda\in\mathbb{R})$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x dans I et assez proche de a.
Lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ (ou $-\infty$), la droite d'équation $x=a$ est ***asymptote verticale*** à la courbe représentative de f.

Exemple : Si $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$ et la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.





Dans les deux cas, la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction.

Exercices : exo 1 de la feuille n°2

Déterminer les limites de la fonction $f: x\mapsto \dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$ en –2 et 1. (R p 17)

+exo 2 de la feuille n°2 (étude des asymptotes de la fonction inverse à la calculatrice)

III. Propriété des limites

1. Opérations sur les limites

Dans tous les tableaux qui suivent :

- a désigne soit un réel soit $-\infty$, soit $+\infty$;
- l et l' sont des réels.
- f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a

Limite de somme : $\lim_a f+g$

$\lim_a f$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_a g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_a f+g$						

Limite de produit : $\lim_a f\times g$

$\lim_a f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_a g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a f\times g$									

Limite d'un quotient : $\lim_a \frac{f}{g}$

Cas où g a une limite non nulle :

$\lim_a f$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_a g$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$
$\lim_a \frac{f}{g}$							

Cas où g a une limite nulle :

$\lim_a f$	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	0
$\lim_a g$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim_a \frac{f}{g}$					

Remarque : Les mêmes tableaux sont valables pour des suites (u_n) et (v_n) de nombres réels.

Limite en l'infini d'une fonction polynomiale :
La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.

Limite en l'infini d'une fonction rationnelle :
La limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré.

Exemples : Exos 3 - 4 - 5 de la feuille n°2, D n°40 p 61 à l'oral

Limite d'une suite particulière :
Soit q un nombre réel, on considère la suite (q^n)

Si $q > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ Si $q = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

Si $-1 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ Si $q \leq -1$, la suite (q^n) diverge.

2. Limites et ordre

Théorème des gendarmes :

- Soient (v_n) et (w_n) deux suites convergeant vers le même réel l.
  Si (u_n) est une suite tq à partir d'un certain rang $v_n < u_n < w_n$, alors $u_n \to l$
- a désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$, l un nombre réel. Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage I de a.
  Si pour tout $x \in I$, $g(x) < f(x) < h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

Preuve pour les fonctions quand $x \to +\infty$:
Soit I un intervalle ouvert contenant l. Il s'agit de démontrer que I contient tous les réels $f(x)$ pour x assez grand.
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ donc I contient tous les réels $g(x)$ pour x supérieur à un certain réel A_1.
$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$ donc I contient tous les réels $h(x)$ pour x supérieur à un certain réel A_2.
On pose $A = \max\{A_1; A_2\}$.
Alors si $x > A$, l'intervalle I contient $g(x)$ et $h(x)$, donc I contient tous les réels compris entre $g(x)$ et $h(x)$, en particulier I contient $f(x)$ pour tout $x > A$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n + 3(-1)^n}{n+3}$

Exercice : n°7 de la feuille 2.

Dans les 3 propriétés suivantes, (u_n) et (v_n) désignent deux suites de réels. l et l' sont deux réels, et a désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Enfin f et g sont deux fonctions définies sur un voisinage I de a.

Propriété 1 :

- Si $u_n \to l$, $v_n \to l'$ et $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, alors $l \le l'$
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$ et pour tout x de I, $f(x) < g(x)$ alors $l \le l'$

Propriété 2 :

- S'il existe un rang à partir duquel $u_n < v_n$ et si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$
- Si pour tout réel de I $f(x) < g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Propriété 3 :

- S'il existe un rang à partir duquel $u_n > v_n$ et si $v_n \to +\infty$ alors $u_n \to +\infty$
- Si pour tout réel de I $f(x) > g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Preuve 1-2-3 : D act 1 p 163, n°33-35 p 60

Exercice : n°6 de la feuille 2

3. Limites d'une composée

a, l et l' désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Soient f une fonction définie sur un voisinage I de a, g une fonction définie sur un voisinage J de l et (u_n) une suite de nombres réels.

Théorème :

- Si $\lim\limits_{n} u_n = a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l$
- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to l} g(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l'$

Preuve (admise) : Composée de fonctions dans le cas où $a = +\infty, l = -\infty$, l' réel.
Soit J un intervalle ouvert contenant l'. Comme $\lim\limits_{X \to -\infty} g(X) = l'$, J contient aussi toutes les valeurs de $g(X)$ pour X inférieur à un certain réel B.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, l'intervalle $]-\infty; B[$ contient tous les réels $f(x)$ pour x supérieur à un certain réel C.
Si $x > C$ alors $f(x) < B$ et donc $g \circ f(x) \in J$.
Ainsi tout intervalle ouvert J qui contient l' contient aussi tous les réels $g \circ f(x)$ pour x assez grand.
Autres preuves sur le même principe. Faire le cas « composée d'une suite et d'une fonction » avec $a \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$ chez soi.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}$

Exercices : n°8 de la feuille 2, D 43 à 45 p61, p 62, n°67 p64…