Chapitre 13 :
Géométrie dans l'espace

Première Partie : Produit Scalaire

Deuxième Partie *(à suivre)* : Droites & Plans

Annexes : Fiches méthodes

Chap 13 : Produit Scalaire *(Première partie)*

I. Rappels dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1) Différentes expressions

Définition :

On appelle ***produit scalaire*** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Remarques :

- Si l'un des vecteurs est nul alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- Ce produit scalaire est indépendant des représentants. On peut donc choisir des représentants de même origine
- Si $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ alors $\vec{u}\bullet\vec{v}=\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$,

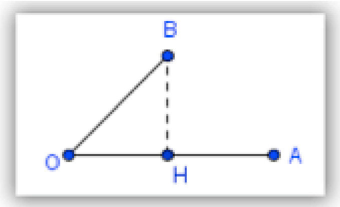
Propriétés :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs *colinéaires* de *même sens*, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs *colinéaires* de *sens contraire*, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
- $\vec{u}\cdot\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, est appelé ***carré scalaire*** de $\vec{u}$. On a :

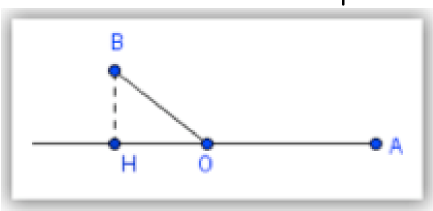
  $$\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{OA}^2=OA^2.$$
- **Définition géométrique** : Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA), alors :

  $$\vec{u}\bullet\vec{v}=\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OH}$$

Preuves : revenir à la définition + Pythagore dans les deux cas suivants pour la dernière.



ou



Règles de calculs :

Soient $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel.

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$
3. $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
4. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$
5. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$
6. $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

Preuves : 1 & 2 : revenir à la définition et distinguer les cas $k>0, k<0, k=0$; 3. admis ; 4 & 5 : utiliser le 3.

Nouvelle définition :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right] \quad \text{et} \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right].$$

Propriété (Définition avec des coordonnées) :

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées $(x;y)$ et $(x';y')$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Preuve : Ecrire $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ et appliquer les règles de calculs.

Remarque :
Dans un repère orthonormé, si A et B sont deux points du plan de coordonnées respectives $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$, alors $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$. *Faire l'analogie avec les complexes.*

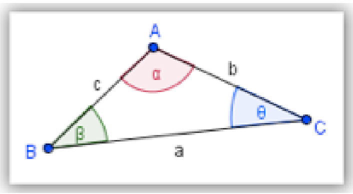
Exercice n°1 :
Soit ABCD un rectangle tel que AB = 4 et AD = 3.
Soient A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A et C sur (BD).

1. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$. En déduire $\cos\widehat{ABD}$, puis une valeur approchée de $\widehat{ABD}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$. En déduire A'C'.

Exercice n°2 :
Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A. Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, K le milieu de [IC]. Démontrer que les (AK) et (JB) sont perpendiculaires.

Exemple d'applications à la géométrie : on peut montrer les résultats suivants

- Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment [AB], alors, pour tout point M du plan, $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$ (Théorème de la médiane).
- Soient ABC un triangle et a, b et c les longueurs respectives des côtés [BC], [AC] et [AB], alors : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$. (cette formule porte le nom de Al Kashi).



On obtient deux autres formules par permutation circulaire des lettres.

2) Equations droites et cercles

Définition :

Un vecteur ***normal*** d'une droite est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite.

Droites :

- Soit A un point d'une droite d et $\vec{n}$ un vecteur normal à d. Alors d est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
- Si $\vec{n}(a\,;b)$ est un vecteur normal de la droite d, alors une équation de d s'écrit sous la forme $ax + by + c = 0$.
- Réciproquement, si a et b sont deux réels non nuls, l'équation $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite dont le vecteur de coordonnées (a ; b) est un vecteur normal.

Cercles :

- Le **cercle** de centre I (a ; b) et de rayon R est l'ensemble des points M(x ; y) tels que : $IM^2 = R^2$. Une équation de ce cercle est $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.
- Le **cercle** de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Exercice n°3 :

Dans un repère orthonormé, on donne les points : $A(1\,;3)$, $B(2\,;5)$ et $C(-1\,;4)$.

2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.
3. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
4. Déterminer une équation de la médiatrice de [BC].

3) Distance d'un point à une droite

Définition :

Soient d une droite du plan et M un point quelconque du plan. On appelle ***distance du point M à la droite*** d la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur d.

Propriété :

Soient d une droite d'équation $ax + by + c = 0$ avec a et b deux réels non nuls et $A(x_A\,;y_A)$ un point du plan.

La distance du point A à la droite d est égale à $\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Preuve : elle sera faite dans l'espace succinctement. L'idée est la même.

Exercice n°4 :

Dans un repère orthonormé, on donne la droite d d'équation $3x - 4y + 7 = 0$ et le point $A(-2\,;1)$.

1. Déterminer la distance de A à la droite d.
2. Vérifier que les points $B(-1\,;1)$ et $C(1\,;2,5)$ appartiennent à la droite d.
3. Déterminer l'aire du triangle ABC et en déduire la distance h de B à la droite (AC). Donner une valeur approchée de cette distance.

II. Produit Scalaire dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j};\vec{k}\right)$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1) Définition

Définition- Propriété :

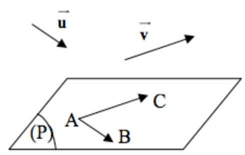
Soient A, B et C trois points de l'espace vérifiant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Alors il existe au moins un plan (P) contenant les trois points A, B et C.
Le ***produit scalaire des deux vecteurs*** $\vec{u}$ ***et*** $\vec{v}$ ***de l'espace*** est le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, calculé dans le plan (P).

Remarque : On admet que le produit scalaire est indépendant du choix des représentants des deux vecteurs et du choix du plan.

2) Propriétés

- **Normes et angles** :

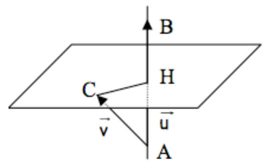
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$ où $\alpha = \widehat{BAC}$



- **Définition géométrique** :

Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH}$$



Exercice n°5 :
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Sur la perpendiculaire au plan (ABC) en C, on place le point D tel que CD = a. Soit H le projeté de A sur (BD).
Démontrer que $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$. Puis calculer la valeur approchée à 10^{-1} près de l'angle $\widehat{DBA}$.

Règles de calcul : (admises)

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un réel.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

Propriété (Définition avec des coordonnées) :

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Remarque : Avec A (x_A ; y_A ; z_A) et B (x_B ; y_B ; z_B) : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exercice n°6 :

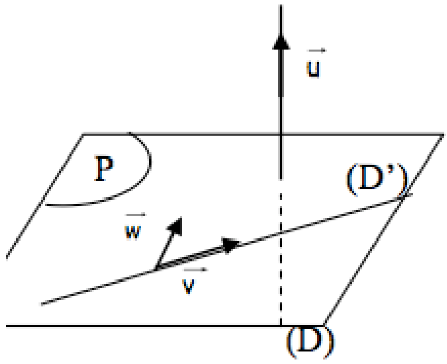
Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère : A(3 ;1 ;5), B(3 ;5 ;1) et C(-1 ;5 ;5).

Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

3) Orthogonalité dans l'espace

Définitions :

- Deux droites d et d' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonales*** ssi $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$



Théorème-définition :

- Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan (P) de base $(\vec{v};\vec{w})$ sont ***orthogonaux*** ssi : $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ et $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$

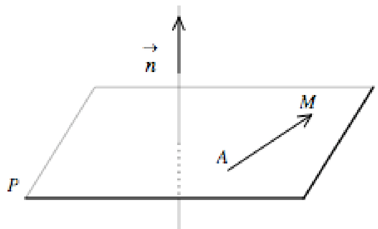
Exercice n°7 : Soit ABCDEFGH un cube. Démontrer que (AG) est orthogonale au plan (CFH).

Définition :

Un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan (P) est appelé ***vecteur normal*** à (P).

Théorème :

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ est le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



Exemple :

Soit [AB] un segment de milieu I. L'ensemble des points M de l'espace équidistants de A et B s'appelle le plan médiateur du segment [AB] : c'est le plan passant par I, de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Exercice n°8 :

Soient O un point de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur unitaire et (P) le plan passant par O orthogonal à $\vec{n}$.

H est le projeté orthogonal d'un point M sur le plan (P). Exprimer $\overrightarrow{OH}$ à l'aide de $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{n}$.

Définition :

Deux plans sont ***orthogonaux*** lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Propriétés :

Deux plans (P) et (P'), de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthgonaux ssi $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$

Ils sont ***parallèles*** ssi leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Exercice n°9 :

Soit ABCDEFGH un cube. Démontrer que les plans (ABGH) et (CFH) sont perpendiculaires.

III. Géométrie analytique

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

1) Equation cartésienne d'un plan

Propriété :

- Dans un repère orthonormé, tout plan admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, où a, b, c sont des réels non tous nuls. Le vecteur $\vec{n}\left(a;b;c;d\right)$ est un vecteur normal à ce plan.

- *Réciproquement* : soient a, b, c, d quatre réels tels que a, b, c ne sont pas tous nuls. Dans un repère orthonormé, l'ensemble des points M(x ;y ;z) de l'espace vérifiant $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\left(a;b;c;d\right)$.

Preuve :
Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point d'un plan (P) et $\vec{n}\left(a;b;c\right)$ un vecteur normal à (P) (non nul).
$M\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$ en posant $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$.
Réciproque : Soient a, b, c, d quatre réels tels que a, b, c ne sont pas tous nuls.
L'ensemble (E) des points M(x ;y ;z) de l'espace vérifiant $ax+by+cz+d=0$ n'est pas vide (il contient par exemple le point $\left(0;0;-\dfrac{d}{c}\right)$).
Soit alors $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de (E). Si $M\neq A$ appartient à (E), alors :
$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=ax+by+cz-(ax_A+by_A+cz_A)=-d+d=0$.
Donc M appartient au plan contenant A et de vecteur normal $\vec{n}\left(a;b;c\right)$.

Cas particuliers :

- Le plan (Oxy) a pour équation z = 0, (Oxz) : y = 0 et (Oyz) : x = 0
- Le plan passant par les points $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ et $C(0;0;c)$ (lorsque a, b, c ne sont pas nuls) a pour équation $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.
  En effet il s'agit bien d'une équation de plan contenant les points A, B et C et comme ceux-ci ne sont pas alignés, ce plan correspond bien au plan (ABC).

Exercice n°10 :
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Donner une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A\left(-2;1;3\right)$ et orthogonal à (BC) avec $B\left(1;-2;2\right)$ et $C\left(4;1;-1\right)$.

Définition :

L'ensemble des point M(x ;y ;z) qui vérifie $ax+by+cz+d\geq 0$ est un demi-espace, délimité par le plan (P) d'équation $ax+by+cz+d=0$, frontière comprise. L'autre demi-espace de même frontière (P), frontière comprise est l'ensemble des points M(x ;y ;z) qui vérifient $ax+by+cz+d\leq 0$.

Exercice n°13 :

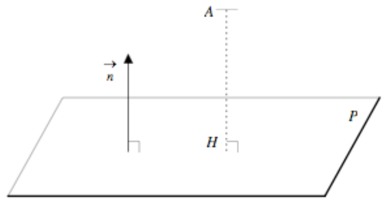
Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, on donne : $A\left(1;1;1\right)$ et $B\left(3;-1;-3\right)$.

1. Déterminer une équation du plan médiateur du segment [AB].
2. Déterminer l'inéquation du demi-espace de frontière le plan médiateur de [AB] et contenant le point B, frontière comprise.

2) Distance d'un point à un plan

Propriété-définition :

Soit H est le projeté orthogonal d'un point $A(x_A;y_A;z_A)$ sur un plan (P).
La distance d'un point A au plan (P) est la distance AH.



- Si (P) est le plan passant par B et de vecteur normal $\vec{n}$ alors : $AH=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$.
- Si (P) est le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ alors : $AH=\dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Preuve : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}=\pm AH\times\left\|\vec{n}\right\|$, donc $\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|=AH\times\left\|\vec{n}\right\|$

On a $\left\|\vec{n}\right\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=a(x_B-x_A)+b(y_B-y_A)+c(z_B-z_A)=-d-ax_A-by_B-cz_B$ car $B\in(P)$ donc vérifie l'équation du plan.

Exercice n°11 : Calculer la distance de $A(5;2;-3)$ au plan (P) d'équation : $x+4y+8z+2=0$.

3) Sphère dans un repère orthonormé

Définition :

La ***sphère*** de centre I (a ; b ; c) et de rayon R est l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que : $IM^2=R^2$.

Propriétés :

- Une équation de la sphère de centre I (a ; b ; c) et de rayon R est :
$$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2+\left(z-c\right)^2=R^2.$$
- La sphère de diamètre [AB] est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tels que :
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0.$$

Preuve : Il suffit de remplacer IM^2 par son expression avec les coordonnées.
Soit I le milieu de [AB] (et donc le centre de la sphère). Alors :
$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=MI^2-IA^2=MI^2-R^2$$
On en déduit $M\in S\Leftrightarrow MI=R\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Exercice n°12 : Soit $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.

1. Démontrer que l'ensemble des points $M(x;y;z)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2=0$ est une sphère, dont on déterminera le centre I et le rayon.
2. Le plan (P) d'équation $x-2y+2z+1=0$ est-il sécant à cette sphère ?

4) Hauteurs d'un tétraèdre

Définition :

On appelle ***hauteur d'un tétraèdre***, toute droite passant par un sommet et orthogonale au plan de la face opposé.

Propriété :

Le volume d'un tétraèdre ABCD de hauteur issue $[AH]$ est $V=\frac{1}{3}AH\times S$ où H est le pied de la hauteur issue de A et S est l'aire de la face (BCD).

Preuve : on pourrait utiliser les intégrales, par exemple.