Fiches Méthode pour la géométrie dans l'espace

1. **Angle :** $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$

2. **Distance d'un point A donné à :**
   - **Une *droite* dont on connaît un vecteur *normal*** $\vec{n}$ **:**

$d(A;D) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$, quand B est un point donné de D

$d(A;D) = \dfrac{\left|ax_A + by_A + c\right|}{\|\vec{n}\|}$, quand $ax + by + c = 0$ est une équation donnée de D

   - **Un *plan* dont on connaît un vecteur *normal*** $\vec{n}$ **:**

$d(A;P) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$, quand B est un point donné de (P)

$d(A;D) = \dfrac{\left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|}{\|\vec{n}\|}$, quand $ax + by + cz + d = 0$ est une équation donnée de (P)

3. **Application :** Position relative d'un plan (P) et d'une sphère de centre I, de rayon R :
   - Discussion suivant la distance $d(I;P)$ et le rayon R de la sphère.

4. **Deux droites D et D' sont orthogonales ssi :**
   - $\vec{u}\cdot\overrightarrow{u'} = 0$ où $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont deux vecteurs ***directeurs*** respectifs de D et D'
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'} = 0$ où $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont deux vecteurs ***normaux*** respectifs de D et D'

5. **Une droite D, de vecteur *directeur*** $\vec{u}$, **est orthogonale à un plan (P) ssi :**
   - $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ **ET** $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$ où $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs de (P) ***non colinéaires***
   - $\vec{u} = k\vec{n}$, où k est un réel et $\vec{n}$ un vecteur ***normal*** à (P)

6. **Une droite D, de vecteur *directeur*** $\vec{u}$, **est parallèle à un plan (P) ssi :**
   - $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$ où $\vec{n}$ un vecteur ***normal*** à (P)

7. **Deux plans (P) et (P') sont orthogonaux ssi :**
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{n'} = 0$ où $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont deux vecteurs ***normaux*** respectifs de (P) et (P')

8. **Deux plans (P) et (P') sont parallèles ssi :**
   $\vec{n} = k\overrightarrow{n'}$ où k est un réel et $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ deux vecteurs ***normaux*** respectifs de (P) et (P')

9. **Equation du plan (P) contenant un point** $A(x_A;y_A;z_A)$ **donné :**
   L'équation est du type $ax + by + cz + d = 0$,
   - où $a,\ b,\ c$ sont donnés par un vecteur ***normal*** $\vec{n}(a;b;c)$ de (P)
   - d est trouvé en résolvant l'équation $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$

10. **Vérifier qu'une équation** $ax + by + cz + d = 0$ **est celle du plan (ABC) :**
    - Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés
    - Montrer que les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation donnée

11. **Vérifier que $H(x_H;y_H;z_H)$ est la projection orthogonale de $A(x_A;y_A;z_A)$ sur le plan (P) d'équation $ax+by+cz+d=0$:**
   - Vérifier que $H \in (P)$
   - Vérifier que $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$, où k est un réel et $\vec{n}$ un vecteur ***normal*** de (P)

12. **Trouver l'ensemble des points M vérifiant une relation du type $\left\|a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}\right\| = 2$ (où $a+b+c \neq 0$) :**
   - On introduit le point $G = bar\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$
   - On réduit la somme
   - On interprète le résultat obtenu en termes géométrie

13. **Vérifiant qu'un plan (P) est le plan médiateur d'un segment $[AB]$:**
   - Vérifier que $\vec{n} = k\overrightarrow{AB}$, où $\vec{n}$ est un vecteur normal de (P)
   - Vérifier que $I \in (P)$, où I est le milieu de $[AB]$

14. **Trouver un représentation paramétrique de la droite (AB) :**
   - Trouver $\overrightarrow{AB}$ qui est un vecteur directeur de (AB)
   - Donner l'équation paramétrique de la droite passant par A (ou B) et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$
   - Pour un segment, penser à l'intervalle que parcours le paramètre t !!!

15. **Etudier la position relative de deux droites dont on connaît une représentation paramétrique :**
   - Etudier la colinéarité de leur vecteur directeur
   - S'ils ne sont pas colinéaires, regarder si les droites sont coplanaires pour conclure

PENSE-BÊTE :

L'ensemble des points M de l'espace tels que :

- $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = R$ est la sphère de centre A et de rayon R
- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$
- $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$ est le plan (P) contenant A et de vecteur normal $\vec{n}$

Le ***plan médiateur*** d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B. Il passe par son milieu et est orthogonal à la droite (AB).

La distance entre deux points est : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

L'équation paramétrique $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_0 \end{cases}$ est une équation de la droite passant par $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$

Une équation de la sphère de centre I(a ;b ;c) et de rayon R est : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$

Le ***volume d'un tétraèdre*** ABCD est donné par : $V = \frac{1}{3}AH \times S$ où H est le pied de la hauteur issue de A et S l'aire de la face opposée BCD.