Chapitre 13 :
Géométrie dans l'espace

Première Partie *(fait)* : Produit Scalaire

Deuxième Partie : Droites & Plans

Annexes : Fiches méthodes

Chapitre 13 : Droites et Plans *(Deuxième partie)*

Les résultats établis ici sont valables aussi bien en géométrie plane qu'en géométrie dans l'espace. Ainsi nous ne préciserons pas si les points considérés appartiennent au plan ou à l'espace (sauf lorsque l'on parlera de coordonnées).

I. Barycentre de n points pondérés

1) Définition

Théorème-Définition :

Soit $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ un système de points pondérés de masse totale $m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Si $m \neq 0$ alors il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Ce point G est appelé barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$.

Preuve : (faite en 1ère)
D'après la relation de Chasles

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_1} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_1A_i} = \overrightarrow{GA_1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \vec{u} = m\overrightarrow{GA_1} + \vec{u}$$

D'où l'équivalence : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{m}\vec{u}$ (puisque $m \neq 0$)

Posons $\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{u}$. Ainsi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1G} = \vec{v}$. Or nous savons qu'étant donné un point A_1 et un vecteur $\vec{v}$ (entièrement déterminé par le système $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$), il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{A_1G} = \vec{v}$.

Donc il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Cas particulier : Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n$, le point G est appelé ***isobarycentre*** du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$.

2) Réduction de la somme et applications

Réduction de somme :

Soit M un point quelconque et G le barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{1 \le i \le n}$ $\left(m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0\right)$

Alors, on montre en introduisant le point G dans le membre de gauche que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = m\overrightarrow{MG}$

Application géométrique : ***détermination de lieux géométriques***
L'introduction de barycentre(s) bien choisi(s) dans une égalité vectorielle permet de faire des réduction de somme et d'ainsi déterminer des lieux géométriques.

Exemples : Soit A, B et C des points de l'espace.
$E=\left\{M \text{ tels que } \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\right\}$ est la sphère de centre G, barycentre de (A ; 2), (B ; -1) et (C ; 1), et de rayon $\frac{1}{2}AB$.
$F=\left\{M \text{ tels que } \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|\right\}$ est le plan médiateur du segment $[GG']$ où G' est le barycentre des points (A ; 1), (B ; 2) et (C ; -1).

Application : ***Coordonnées***
On note $(x_i;y_i;z_i)$ les coordonnées du point A_i, pour tout i tel que $1\le i\le n$. Notons également $(x_G;y_G;z_G)$ les coordonnées de G. En prenant O pour point M, on a $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$. Ceci donne : $\begin{cases} x_G=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i \\ y_G=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i \\ z_G=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i \end{cases}$ (la troisième coordonnée étant nulle dans le plan (xOy))

Remarque : dans le plan complexe, on avait une formule analogue en terme d'affixes :
$$z_G=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i$$

II. Caractérisations barycentriques

1) Droites, demi-droites, segments

Propriété :
- La droite (AB) est l'ensemble des barycentres des points A et B.
- Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients de même signe.

Preuve : *Pour la droite :*
Si $G=bar\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ alors on a $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires, d'où $G\in(AB)$.
Soit M un point quelconque de (AB). Montrons qu'il s'agit d'un certain barycentre de A et B.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires donc il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$. D'où $(1-\lambda)\overrightarrow{AM}+\lambda\overrightarrow{BM}=\vec{0}$. Or $1-\lambda+\lambda\neq0$. Donc M est le barycentre de $(A;1-\lambda)$ et $(B;\lambda)$.
Pour le segment : Si $G=bar\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$, (supposons $\alpha\neq0$, sinon G = B, trivial). Alors $G=bar\left\{(A;1);\left(B;\frac{\alpha}{\beta}\right)\right\}$ et $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB}$. Discuter la position de G suivant les signes de α et β.

2) Plans, parties d'un plan

Propriété :

- Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C.
- L'intérieur d'un triangle ABC, côtés compris, est l'ensemble des barycentres des points A, B et C affectés de coefficients de même signe.

Preuve : Admis (cf costantini) mais analogue à celle du II. 1)

III. Représentations paramétriques

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Propriété-Définition :

La droite (D) passant par $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a;b;c\right)$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ pour $t\in\mathbb{R}$, ce qui équivaut à :

$$(S)\ \begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}.$$

Le système (S) est appelé une ***représentation paramétrique*** de la droite $D(A;\vec{u})$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et on dit que t est **le paramètre.**

Exemple : la droite dont une représentation paramétrique est $(S)\ \begin{cases} x=2t+1 \\ y=t+3 \\ z=-4 \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}.$ est la droite passant par le point A(1 ; 3 ; -4) et de vecteur directeur $\vec{u}(2;1;0)$.

Exercices :

1. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par les points $A\left(-1;2;-3\right)$ et $B\left(1;-1;1\right)$

2. Considérons les droites : (d) $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-3 \\ z=-t+2 \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$ et (d') $\begin{cases} x=3t+2 \\ y=-t-1 \\ z=t+1 \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$.

   Étudier l'intersection des deux droites (d) et (d'), si elle existe.

Cas des demi-droites et des segments :

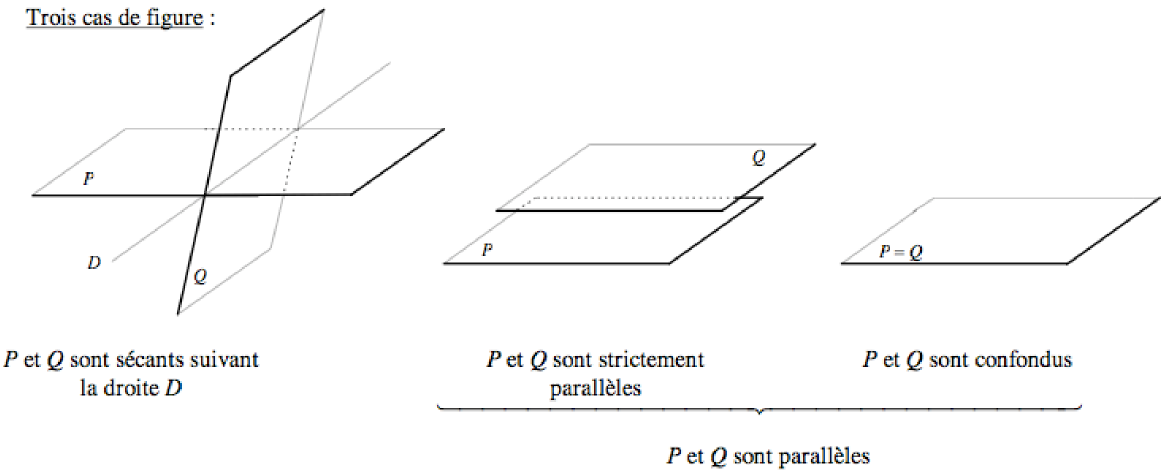
Soient A et B deux points de l'espace. On note $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

- Pour caractériser la demi-droite $[AB)$, on limite les valeurs du paramètre t à $[0;+\infty[$
- Pour caractériser le segment $[AB]$, on limite les valeurs du paramètre t à $[0;1]$.

IV. Systèmes & Intersections

1) Intersection de deux plans

Soient deux plans (P) et (Q) d'équation respective $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$



Les éventuels points d'intersection des deux plans sont les solutions du système :

$$(S)\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

Pour reconnaître le cas de figure, on étudie la colinéarité des vecteurs $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{n}'(a';b';c')$ normaux respectivement à (P) et (Q) :

- Lorsque $\vec{n} \neq k\vec{n'}$, ie $(a;b;c)$ et $(a';b';c')$ ne sont pas proportionnels, l'intersection de (P) et (Q) est une droite. On peut trouver sa représentation paramétrique en utilisant une des trois coordonnées comme paramètre et en résolvant le système.
- Lorsque $\vec{n} = k\vec{n'}$, ie $(a;b;c)$ et $(a';b';c')$ sont proportionnels, les plans sont parallèles :
  - Si $(a;b;c;d)$ et $(a';b';c';d')$ ne sont pas proportionnels, les plans sont strictement parallèles, l'ensemble des solutions est vide
  - Si $(a;b;c;d)$ et $(a';b';c';d')$ sont proportionnels, les plans sont confondus, l'ensemble des solutions est donné par une équation du plan.

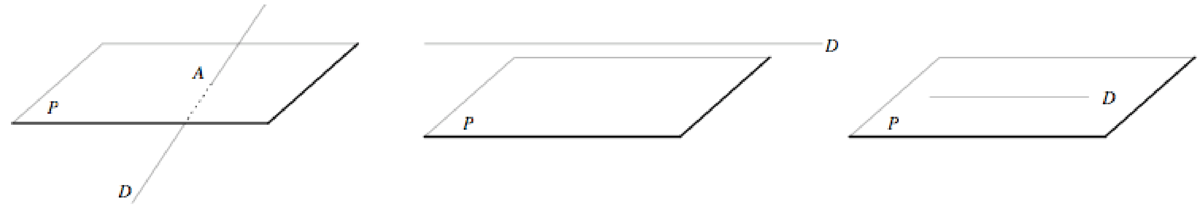
Exercices :

1. Considérons les plans d'équations : $(P): 2x+y-z-2=0$ et $(P'): x+3y+7z-11=0$.
   a. Démontrer que les deux plans sont sécants.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (d), intersection de ces deux plans.
2. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les plans (P), (Q) et (R) ont respectivement pour équations cartésiennes $x+y+z+3=0$, $2x+2y+2z+7=0$ et $3x-y+2=0$.
   a. Déterminer un vecteur normal à chaque plan.
   b. Étudier l'intersection des plans (P) et (Q).
   c. Étudier l'intersection des plans (P) et (R).

2) Intersection d'une droite et d'un plan

Soit (P) un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et D une droite représentée par $\begin{cases} x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=\gamma t+z_0 \end{cases}$

Trois cas de figure :



D et *P* sont sécants en *A* — *D* est strictement parallèle à *P* — *D* est incluse dans *P*

D et *P* sont parallèles

Pour reconnaître le cas de figure, on étudie l'orthogonalité des vecteurs $\vec{n}(a;b;c)$ normal à (P) et $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ directeur de D :

- Lorsque $\vec{n}\cdot\vec{u}\neq 0$, (P) et D sont sécants en un point A. On recherche ses coordonnées en résolvant l'équation suivante, d'inconnue t :

$$a(\alpha t+x_0)+b(\beta t+y_0)+c(\gamma t+z_0)=0$$
$$\Leftrightarrow (a\alpha+b\beta+c\gamma)t+ax_0+by_0+cz_0=0$$
$$\Leftrightarrow t=-\frac{ax_0+by_0+cz_0}{a\alpha+b\beta+c\gamma}$$

En remplaçant dans la représentation paramétrique de D, on trouve les coordoonnées de A.

- Lorsque $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$, (P) et D sont parallèles
  - Si $(x_0;y_0;z_0)$, qui est un point de D, vérifie l'équation de (P), alors la droite est contenue dans le plan. Leur intersection est donc D.
  - Sinon, D est strictement parallèle à (P). Leur intersection est donc vide.

Exercices :

1. Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, soient le plan (P) a pour équation : $5x+y-z+3=0$ et la droite (d) pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=t \\ y=1-6t \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=3-t \end{cases}$

   Étudier l'intersection de la droite (d) et du plan (P).

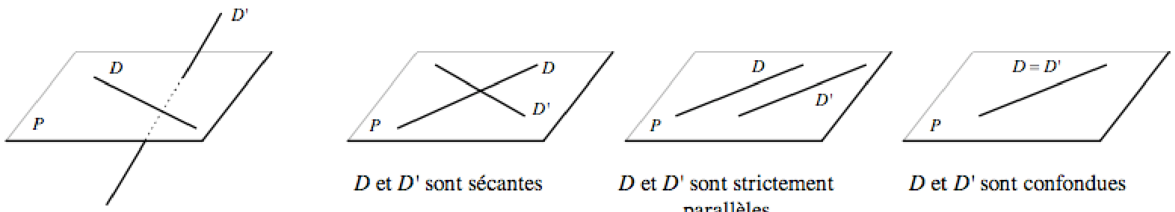
2. Étudier l'intersection de la droite (d) passant par $A(2;1;-4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-2;4)$ et du plan (P) d'équation : $x+2y-z+2=0$.

3) Intersection deux droites

Soient D et D' deux droites de représentation paramétrique respective $\begin{cases} x = at + x_1 \\ y = bt + y_1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = ct + z_1 \end{cases}$ et

$\begin{cases} x = \alpha t' + x_2 \\ y = \beta t' + y_2, \quad t' \in \mathbb{R} \\ z = \gamma t' + z_2 \end{cases}$ (bon réflexe : ne pas utiliser le même paramètre t pour les deux droites !)

Quatre cas de figure :



D et D' sont non coplanaires

D et D' sont sécantes

D et D' sont strictement parallèles

D et D' sont confondues

D et D' sont coplanaires

Les éventuels points d'intersection de D et D' sont les solutions du système, d'inconnues t et t' :

$$\begin{cases} at + x_1 = \alpha t' + x_2 \\ bt + y_1 = \beta t' + y_2 \\ ct + z_1 = \gamma t' + z_2 \end{cases}$$

Exercice :

Soient les points A(1 ; -1 ; 0) ; B(0 ; -1 ; 1) ; C(3 ; -2 ;0) et D(2 ; -3 ; 3). Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

La droite (AB) est représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -1 \quad , \ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

La droite (CD) est représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = -t' + 3 \\ y = -t' - 2, \ t' \in \mathbb{R} \\ z = 3t' \end{cases}$$

On résout le système : $\begin{cases} -t + 1 = -t' + 3 \\ -1 = -t' - 2 \\ t = 3t' \end{cases}$

La deuxième équation donne $t' = -1$, puis la troisième donne $t = -3$.

Ces deux valeurs sont compatibles avec la première équation.

Nous pouvons donc affirmer deux choses :

1) Le système a une solution, donc les droites ont une intersection non vide, elles sont coplanaires.

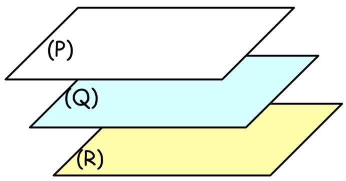
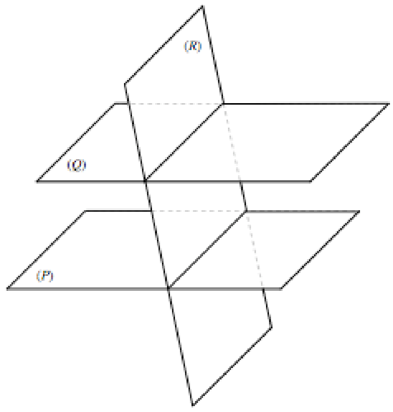
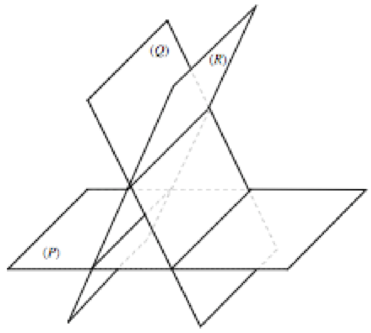
2) Le système admet une unique solution qui est le couple $(t, t') = (-3, -1)$ donc les droites sont sécantes en un point A.

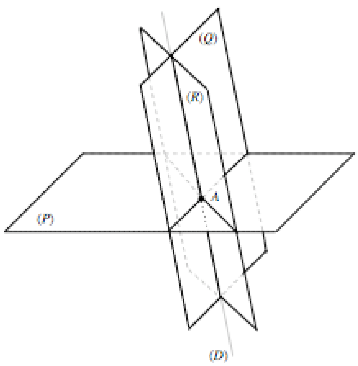
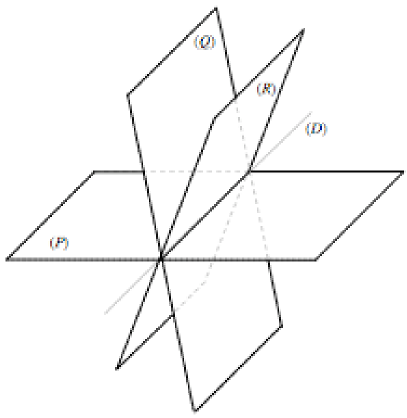
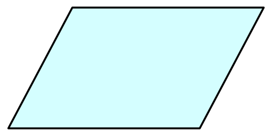
En remplaçant, on trouve les coordonnées du point A :

$$A(4\ ;-1\ ;-3)$$

4) Intersection trois plans

Soient trois plans (P), (Q) et (R) d'équation respective $ax+by+cz+d=0$, $a'x+b'y+c'z+d'=0$ et $a"x+b"y+c"z+d"=0$.

Ils n'ont pas de point commun		
Les trois plans sont parallèles deux à deux, dont au moins deux strictement. 	Plan (R) sécant à deux plans (P) et (Q) strictement parallèles 	Trois plans sécants deux à deux suivant trois droites strictement parallèles 

Ils ont un seul point commun	Leur intersection est une droite	Leur intersection est un plan
Deux plans (Q) et (R) sécants suivant une droite (D) elle-même sécante à un plan (P) 	Trois plans sécants suivant une même droite (D) 	Les trois plans sont confondus 

Les éventuels points d'intersection des trois plans sont les solutions du système :

$$S\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a"x+b"y+c"z+d"=0 \end{cases}.$$

Ce système, d'après le point de vue géométrique, admet soit aucune solution, soit un triplet solution (un point), soit une infinité de triplets solutions (une droite).

Exercices :

1. Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, le plan (P) a pour équation : $2x-y+z-7=0$, le plan (Q) a pour équation : $x+2y-z-6=0$, le plan (R) a pour équation : $-x+y+2z-11=0$.
Étudier l'intersection de ces trois plans.
2. Même question pour les plans (P), (Q) et (R), d'équation respective : $2x+3y-2z-2=0$, le plan (Q) a pour équation : $4x-3y+z-4=0$, le plan (R) a pour équation : $2x+12y-7z-2=0$.