Chapitre 12 : Probabilités

Chap 12 : Probabilités

Introduction orale :
Les probabilités servent à construire des modèles pour décrire des expériences aléatoires. De telles expériences sont par exemple : le numéro obtenu en lançant un dé, la face obtenu en lançant une pièce, la main obtenu dans un jeu de carte, le tirage du loto, etc. A niveau plus élevé, cela permet de prévoir des événements, tels que le temps qu'il fera, la croissance de la population, l'évolution des maladie, l'espérance du temps d'attente d'un bus, l'espérance de vie suivant certains paramètres, etc.

Activité 1 : Rappels de 1$^{\text{ère}}$ S

I. Rappels

1) Expérience aléatoire, événements

Définition :

Une expérience ***aléatoire*** est une expérience dont on ignore le résultat obtenu avant que l'expérience ne soit réalisée.

Exemple : Lancer une pièce de monnaie et observer le côté exposé

Définitions :

L'ensemble de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé ***univers***. On note généralement cet ensemble Ω.
On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'***ensemble des parties*** de Ω.
Lorsque Ω est un ensemble fini, on appelle ***cardinal*** son nombre d'éléments.

Exemples :

- On lance un dé et on regarde la face obtenu : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ $\quad card(\Omega) = 6$
- On lance un dé et on regarde si le résultat est pair ou impair : $\Omega = \{P;I\}$ $\quad card(\Omega) = 2$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP;PF;FP;FF\}$ $\quad card(\Omega) = 4$

Remarque orale : A notre niveau, Ω est un ensemble fini ou infini dénombrable, ie discret. Lorsque Ω est plus grand, on peut connaître son cardinal grâce au dénombrement vu en début d'année.

Exemple : On lance deux dés et l'on considère la somme obtenue. Le tableau ci-dessous résume le vocabulaire relatif aux événements et le vocabulaire ensembliste.

Vocabulaire	Signification	Illustration
Univers (Ω), événement certain	L'ensemble des issues possibles	$\Omega = \{2;3;...;12\}$
L'ensemble vide ($\varnothing$), événement impossible	Le fait de ne pas avoir d'issues	
Evénement élémentaire (ω)	L'une des issues	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Evénement	Sous-ensemble Ω, donc un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$	Obtenir un nombre pair : $A = \{2;4;6;8;10;12\}$ Obtenir un multiple de 5 : $B = \{5;10\}$ Obtenir une somme inférieure à 4 : $C = \{2;3;4\}$
Evénement A et B ($A \cap B$)	Evénement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B = \{10\}$
Evénement A ou B ($A \cup B$)	Evénements constitué des toutes les issues possibles des deux événements	$A \cup B = \{2;4;5;6;8;10;12\}$
Evénements incompatibles ou disjoints (on note $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun	$B \cap C = \varnothing$
Evénement contraire (celui de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme l'univers.	$\overline{A} = \{3;5;7;9;11\}$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$

2) Calculs des Probabilités sur un ensemble fini

Définition :

Une ***loi de probabilité*** P sur un univers Ω est une application de l'ensemble des parties de Ω dans $[0;1]$ qui vérifient les conditions :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$ pour toute famille $A_1, A_2, ..., A_n$ d'événements deux à deux **disjoints.**

Remarques :

- En « clair » : La probabilité $P(A)$ d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.
- En particulier, si A et B sont deux événements disjoints alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- En conséquence, on a : $1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$. Donc $P(\varnothing) = 0$

Définitions :

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ s'appelle un ***espace probabilisé discret***.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir un tel triplet.

Remarques orales :

- On dit « discret » car Ω est un ensemble fini. Dans le cas où Ω est un intervalle de temps par exemple, on ne peut pas dénombrer ces parties et la modélisation est différente et on parle de probabilité « continue ». Dans ce cas là, un événement de probabilité nulle n'est pourtant pas forcément impossible.
- L'ensemble Ω peut contenir des événements impossibles, à partir du moment où l'on définit P telle que leur probabilité soit nulle (donner un exemple si pas clair)

Énoncé expérimental de la Loi des Grands Nombres (à l'oral ?) :

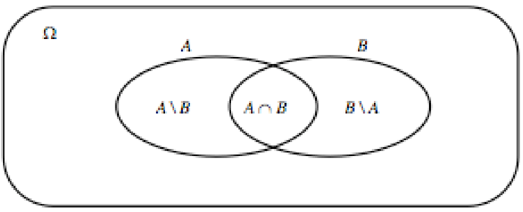
Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire pouvant conduire à des issues $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ la fréquence de réalisation de chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilise aux environs d'un nombre p_i compris entre 0 et 1.

Ce nombre peut être considéré comme la probabilité de réalisation de l'événement $\{\omega_i\}$.

3) Quelques propriétés

Propriété :

La probabilité de la réunion de deux événements est donnée par : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Preuve : On a $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$. Comme $A \setminus B$ et B sont incompatibles on a :

$$P(A \cup B) = P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$$

Propriétés :

- La probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ de A est $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$, $P(A \cap B) = P(A)$, $P(A \cup B) = P(B)$
- $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Preuve : $\overline{A}$ de A sont incompatibles et $A \cup \overline{A} = \Omega$. Donc :

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(\overline{A}) + P(A)$$

Si $A \subset B$ alors B est l'union disjointe de A et $B \setminus A$. Donc $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Comme $P(B \setminus A) \geq 0$ on obtient $P(A) \leq P(B)$. Reste trivial.

$A \setminus B$ et $A \cap B$ sont incompatibles et $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$. Donc :

$$P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$$

Exemples : Test C p220 + Dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à cordes, 20% jouent d'un instrument à vent et 5% jouent d'un instrument à corde et d'un instrument à vent. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il joue d'un instrument à cordes ou à vent ?

4) L'équiprobabilité

<u>Activité 2</u> : Une urne contient 3 boules rouges (R), 2 boules noires (N) et 3 boules vertes (V). On tire une boule au hasard. Qu'est-ce que le terme « au hasard » implique sur la loi de probabilité ? Calculer alors les probabilités des événements R, N, V et leur contraire, puis $P(R \cup V)$.

<u>Définition</u> *:*

> Lorsque Ω est de cardinal fini et que l'on affecte la même probabilité à chaque événement élémentaire, on dit qu'il y a ***équiprobabilité*** ou que la loi de probabilité P est ***équirépartie***,.

On a alors que la probabilité d'un événement A est : $\boxed{P(A) = \dfrac{\text{nbe d'issues favorables}}{\text{nbe d'issues possibles}} = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}}$

En particulier, pour tout événement élémentaire ω de Ω : $P(\omega) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$

Exemples : On lance un dé non pipé. Alors $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ et situation d'équiprobabilité.

- $P(5) = 1/6$
- $P(\text{obtenir un nombre pair}) = 3/6 = 1/2$

C-ex :

- Si le dé est truqué alors on n'a plus l'équiprobabilité. L'énoncé fournit la loi de probabilité.
- Dans le cas où l'on lance deux dés et que l'on fait la somme des résultats obtenus, la situation n'est pas équiprobable. Par exemple : $P(2) = 1/36$ tandis que $P(7) = 6/36$.

<u>Importance de la notion de hasard (à l'oral) :</u>
Notons bien que dans certaines situations, l'expression « au hasard » mérite d'être expliquée. Imaginons que l'on dispose de deux bancs ayant chacun deux places (notée a_1, a_2, a_3, a_4 comme ci-dessous). On suppose que toutes les places sont vides sauf la place a_4. Arrive une personne à qui on demande de s'asseoir « au hasard ». Quelle est la probabilité que les deux personnes soient assises sur le même banc ?

banc 1		banc 2	
a_1	a_2	a_3	a_4

Protocole 1 : on choisit une place équiprobablement parmi les 3. La probabilité est alors de 1/3.
Protocole 2 : on choisit un banc équiprobablement parmi les deux. La probabilité est alors 1/2.

Moralité : les énoncés sont toujours suffisamment précis pour ne pas vous donner de choix à faire. Cependant, de votre côté, quand vous écoutez des statistiques utilisant les probabilités, faites attention aux conclusions que tirent les journalistes, qui n'y connaissent rien ! On peut faire dire à peu près n'importe quoi aux probabilités suivant les choix de modèle.

Exercice : Tests C. p 220
Dans un jeu de 32 cartes on choisit une carte au hasard. Calculer la probabilité d'avoir une figure, d'avoir un trèfle, d'avoir une figure de trèfle.

II. Variables aléatoires

Dans ce paragraphe, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ désigne un espace probabilisé discret.

1) Un nouvel espace probabilisé

Activité 3 : Variables aléatoires

Définition :

Lorsqu'on associe un nombre réel à chaque événement élémentaire de Ω, on dit que l'on définit une ***variable aléatoire***, notée en général X. C'est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Exemple : cf activité 3

Remarque : La variable aléatoire X permet alors de définir un nouvel univers numérique $X(\Omega)$, ainsi qu'une nouvelle probabilité P_X sur cet univers $X(\Omega)$ et donc un nouvel espace probabilisé.

Définition-Proposition (admis) :

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit de cardinal n. A chaque valeur x_i $(1 \leq i \leq n)$ de X on peut associer les probabilités p_i des événements « $X = x_i$ ». On a alors défini **la loi de probabilité** P_X de la variable aléatoire X.

Exemples : 1. Cf. activité 3

2. On fait la même expérience, mais cette fois on définit la variable aléatoire :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si deux faces identiques apparaissent successivement} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

y_i : valeurs de Y	0	1
$P_Y(y_i)$	$1/4$	$3/4$

2) Espérance, Variance et Ecart-type

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit de cardinal n. Notons $\{x_1; x_2; ....; x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X.

- L'***espérance mathématique*** de la variable aléatoire X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n$$
C'est la moyenne des x_i pondérée par les p_i
- La ***variance*** de la variable aléatoire X est le nombre, noté $V(X)$, défini par :
$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ...p_n(x_n - E(X))^2$$
C'est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne
- L'***écart type*** de la variable aléatoire X est le nombre noté $\sigma(X)$, défini par :
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque : La variance est une quantité positive, donc l'écart type est bien défini.

Exemples précédents :

Dans l'activité : $E(X)=\frac{1}{8}\times 0+\frac{3}{8}\times 1+\frac{3}{8}\times 2+\frac{1}{8}\times 3=\frac{3}{2}$

$V(X)=\frac{1}{8}\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{8}\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{8}\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(3-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ D'où $\sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Dans le cours : $E(Y)=\frac{1}{4}\times 0+\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$ $V(X)=\frac{1}{4}\left(0-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{16}$ et $\sigma(Y)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

<u>Interprétation</u> :
Lorsque X représente le gain du joueur à un jeu de hasard, $E(X)$ représente le gain moyen qu'il peut espérer par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois. L'écart type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X.

Exerices : Tests D. p220

Remarque à moi-même : si ici je fais la linéarité de l'espérance, alors je peux montrer la formule $V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$.
Costantini parle aussi de fonctions de répartition, succinctement.

III. Conditionnement

Dans ce paragraphe, $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ désigne un espace probabilisé discret.

1) Probabilités conditionnelles

<u>Activité 4</u> : Activité 2 p 221 (à faire chez eux) + Probabilités Conditionnelles

<u>Théorème-Définition :</u>

> Soit A un événement tel que $P(A)\neq 0$. L'application P_A de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$, définie pour tout événement B de $\mathcal{P}(\Omega)$ par : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
>
> est un probabilité sur Ω.
> Le réel $P_A(B)$ parfois noté $P(B\mid A)$ s'appelle probabilité de B sachant A.

Preuve : Deux conditions à vérifier

- $P_A(\Omega)=\frac{P(A\cap\Omega)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$
- Soient B_1, B_2,..., B_n une famille d'événements deux à deux disjoints. On a :

$$P_A\left(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n\right)=\frac{P\left(\left(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n\right)\cap A\right)}{P(A)}=\frac{P\left(\left(B_1\cap A\right)\cup\left(B_2\cap A\right)\cup\ldots\cup\left(B_n\cap A\right)\right)}{P(A)}$$

Or les $B_i \cap A$ sont deux à deux disjoints, puisque les B_i le sont, donc :

$$P_A\left(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n\right) = \frac{P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots + P(B_n \cap A)}{P(A)}$$
$$= P_A(B_1) + P_A(B_2) + \ldots + P_A(B_n)$$

Remarque : L'événement contraire de $B \mid A$ est $\overline{B} \mid A$

Exemples : On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. On appelle A l'événement « le résultat est un nombre 1[er] ». Alors $P_A\left(\{2\}\right) = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$ $\qquad P_A\left(\{4\}\right) = \frac{0}{3/6} = 0$

Exercices : Cf. feuille activité 4 + 18-19 p 233

2) Formules des probabilités totales

Définition :

Les événements non vides $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un ***système complet d'événements*** de Ω lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est Ω. On parle aussi de ***partition***.

Exemple : Soit $E = \{1;2;3;4;5;6\}$. Un système complet d'événement de E est par exemple : $A_1 = \{3\}$, $A_2 = \{1;5;6\}$ et $A_3 = \{2;4\}$

Théorème :

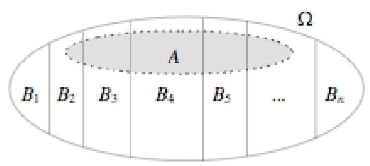
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un système complet d'événement de Ω et B un événement quelconque de Ω. On a : $P(B) = P_{A_1}(B).P(A_1) + P_{A_2}(B).P(A_2) + \ldots + P_{A_n}(B).P(A_n)$.

Preuve : B est la réunion des événements $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B$ qui sont deux à deux disjoints. Ainsi :

$$P(B) = P\left(A_1 \cap B\right) + P\left(A_2 \cap B\right) + \ldots + P\left(A_n \cap B\right)$$

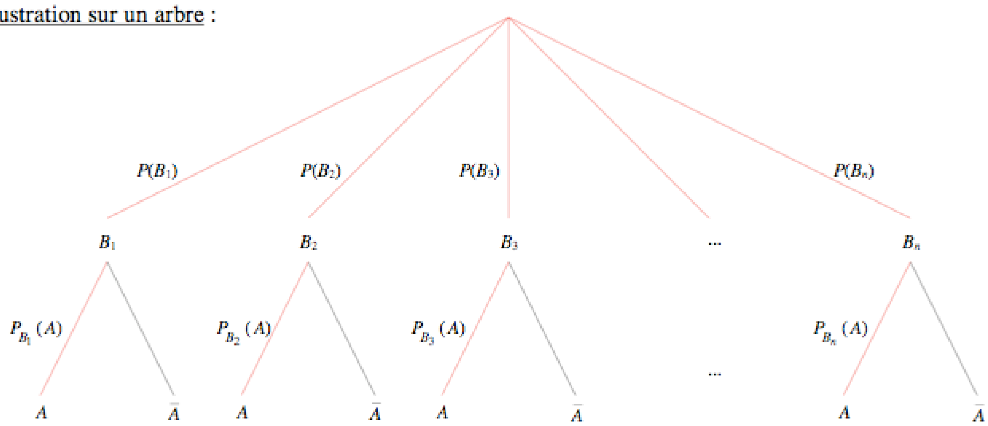
Or pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ on a :

$P\left(A_i \cap B\right) = P_{A_i}(B).P(A_i)$. D'où le résultat.



(échanger les A et les B !!)

Illustration sur un arbre :



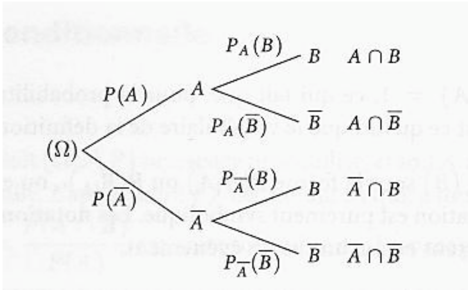
Trois règles importantes pour un arbre :

R1 *: La somme des probabilités des branches partant d'une même racine est toujours égale à 1.*

R2 *: La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin.*

R3 *: La probabilité d'un événements est la somme des probabilités des chemins correspondant à cet événement.*

Remarque : En particulier on a $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap \overline{A})$.



Exercices : cf activité 4 + n° 25 à 29 p 234 et 30 à 32 p 235 + A p 246 + B p 229

IV. Indépendance

Dans ce paragraphe, $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ désigne un espace probabilisé discret.

1) Evénements

Activité 5 : Indépendance de deux événements

Définition :

> Soient A et B sont deux événements de probabilité non nulle.
> A et B sont ***indépendants*** lorsque la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'autre : $P_A(B)=P(B)$ ou $P_B(A)=P(A)$
> On convient qu'un événement de probabilité nulle est indépendant de tout autre.

Théorème : *Caractérisation*

> Soient A et B sont deux événements de probabilité non nulle.
> A et B sont indépendants ssi $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

Preuve : Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cap B)=P_B(A).P(B)=P(A)P(B)$.
Réciproquement, si $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ alors on a :
$P_B(A).P(B)=P(A)P(B)$ d'où $P_B(A)=P(A)$ (car $P(B)\neq 0$).
De même $P_A(B).P(A)=P(A)P(B)$ d'où $P_A(B)=P(B)$ (car $P(A)\neq 0$).
Les événements A et B sont donc indépendants.

Remarque : Ne pas confondre incompatibles et indépendants.
A et B sont indépendants ssi $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ (dépend du choix de P)
A et B sont incompatibles ssi $A\cap B=\varnothing$ et donc $P(A\cap B)=0$ (dépend des ensembles)

C-ex : on lance deux dés équilibrés. A l'événement « obtenir un nombre pair » et B « obtenir un nombre impair »
Alors $P(A \cap B) = 0$ d'où l'incompatibilité, mais $P(A).P(B) = 0,5 \times 0,5 = 0,25 \neq 0$, donc il y a dépendance.
Ainsi deux événements incompatibles et de probabilité non nulle sont toujours dépendants.

Exemples :
1. L'événement certain Ω est indépendant de tout événement A puisque $P(\Omega \cap A) = P(A) = P(A) \times 1 = P(A) \times P(\Omega)$
2. On lance deux pièces simultanément et l'on considère les événements A_1 « Face sur la 1ère pièce » et A_2 « Face sur la 2ème pièce ». $P(A_1) = P(A_2) = 0,5$ et $P(A_1 \cap A_2) = 0,25$. Les événements sont indépendants.

Exercice : Soient A et B des événements indépendants. $\overline{A}$ et B sont-ils indépendants ? $\overline{A}$ et $\overline{B}$?

2) Variables Aléatoires

Définition :

Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. On note $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$ et $\{y_1; y_2; ...; y_m\}$ les valeurs prises respectivement par X et Y.
X et Y sont des variables aléatoires ***indépendantes*** ssi les événements « $X = x_i$ » et « $Y = y_j$ » sont indépendants pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.
C'est-à-dire si : $P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

Exemple : On lance deux pièces. A face on associe le nombre 0 et à pile le nombre 1. On note S la somme des résultats obtenus et P leur produit.
Alors :

s_i	0	1	2
$P(S = s_i)$	0,25	0,5	0,25

Et

p_j	0	1
$P(P = p_j)$	0,75	0,25

On a le tableau de loi de $P(S = s_i \cap P = p_j)$ suivant :

P \ S	0	1	2
0	0,25	0,75	0
1	0	0	1

Alors $P(S = 2 \cap P = 0) = 0$ mais $P(S = 2).P(P = 0) = 0,25 \times 0,75 \neq 0$. Donc les variables ne sont pas indépedantes.

3) Répétitions d'expériences aléatoires

Activité 6 : Txt de Borel p 220

Définition :

Des expériences aléatoires répétées sont indépendantes si le résultat de l'une d'entre elles n'a aucune influence sur le déroulement des autres.

Propriété :

On admettra que lors de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chacun des résultats.

Exemple et contre-exemple : Les tirages du loto d'une semaine sur l'autre sont des expériences aléatoires indépendantes. Par contre, un tirage en lui-même est une répétition d'expériences aléatoires dépendantes, puisqu'il s'agit de tirages successifs dans une même urne sans remise.

Exercices : n° 41 à 49 p 236

+ On lance un dé n fois. Comment choisir n pour que la probabilité p_n d'obtenir au moins un 6 au bout de n lancers soit supérieure à 0,95 ?

V. Loi de Bernoulli, loi binomiale

1) Loi de Bernoulli

Activité 7 : Loi de Bernoulli et loi binomiale

Définition :

Une ***épreuve de Bernoulli*** est une expérience aléatoire à deux issues (Succès et Echec). On note p la probabilité de Succès.

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. Alors on dit que X suit une ***loi de Bernoulli de paramètre*** p.

La loi de X est :

x	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

Exemples : Pile ou face, lacer de dé et regarder si l'on obtient un 6 ou non, …

Proposition :

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors $E(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)$

Preuve : $E(X)=(1-p)\times 0+p\times 1=p$ et

$$V(X)=(1-p)\times(0-p)^2+p(1-p)^2=(1-p)(p^2+p(1-p))=(1-p)p$$

2) Loi Binomiale

Définition :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Lorsque l'on répète, de manière indépendante, n fois une même épreuve de Bernoulli de paramètre p, on dit que l'on fait un ***schéma de Bernoulli*** (de paramètres n, p).

Exercice : on lance n dés ($n \geq 1$). On note A l'événements « obtenir au moins un quatre ».

1) Décrire $\overline{A}$ à l'aide d'une phrase.
2) Faire un arbre et calculer $p(A)$ dans le cas où $n = 3$
3) On suppose maintenant n quelconque. Exprimer $P(A)$ en fonction de n.
4) Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un quatre soit supérieure à $3/4$?

Définition :

Soit un schéma de Bernoulli de paramètres n, p. On note X la variable aléatoire égale au nombre de Succès. On dit alors que X suit une ***loi binomiale de paramètres*** n et p.

Exemple précédent : Dans le cas où $n = 3$, on a d'après l'arbre

$$P(X=2) = P(\overline{S},S,S) + P(S,\overline{S},S) + P(S,S,\overline{S}) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}.$$

Théorème :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ on a : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$

Preuve : Soit $k \in [\![0;n]\!]$ la probabilité d'avoir k succès suivi de $n-k$ échecs est $p^k(1-p)^{n-k}$.
Mais les échecs et les succès ne sont pas forcément dans cet ordre. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de ranger les k succès parmi les n places. On en déduit $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $\forall k \in [\![0;n]\!]$.

(Hors programme) $E(X) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k$.

Or $\binom{n}{k} k = \frac{n!k}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} n = \binom{n-1}{k-1} n$.

Donc
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} np^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np\left[p+1-p\right]^{n-1} = np \end{aligned}$$

Exemple du tireur de l'activité 7 : Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.

VI. Exemples de lois continues

1) Du discret au continu

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle réel (borné ou non). On dit alors que la variable est continue. On s'intéresse alors à des événements du type X entre les réels a et b , $a \le X$ ou encore $X \le b$.
Exemples : le temps d'attente d'un bus, la durée de vie d'un appareil, la distance d'un point d'impact au centre d'une cible….

Activité 8 : 2-3 p 249 à remanier !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

<u>Définitions</u> :

Soient I un intervalle, f une fonction <u>continue positive</u> sur I et $a, b, c, d \in I$ tels que $a \le b$ et $c \le d$. Dire que P est la ***loi de probabilité*** sur I ***de densité*** f (f est une ***densité de probabilité***) signifie que :

Si $I = [a;b]$ alors $P([c;d]) = \int_c^d f(t)dt$ et $P(I) = \int_a^b f(t)dt = 1$

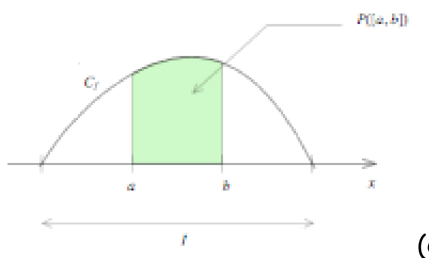
Si $I = [a;+\infty[$ alors $P([c;d]) = \int_c^d f(t)dt$ et $P(I) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = 1$ et

$$P([c;+\infty[) = \lim_{x \to +\infty} \int_c^x f(t)dt = 1 - \int_a^c f(t)dt$$

Remarques :

- La linéarité de l'intégrale et le fait que $P(I) = 1$ rende cette définition légitime.
- Puisque $[c;d] \subset I$ et que f est positive sur I on a bien $0 \le P([c;d]) \le 1$
- La probabilité d'un singleton (ou d'un point) est nulle car $P(\{c\}) = \int_c^c f(t)dt = 0$. On dit alors que $\{c\}$ est un événement quasi-impossible (attention, il n'est pas impossible !!)
- On en déduit que $P([c;d]) = P(]c;d[) = P([c;d[) = P(]c;d])$
- Si $\overline{[c;d]}$ désigne le complémentaire de $[c;d]$ dans I alors $P(\overline{[c;d]}) = 1 - P([c;d])$, de part la linéarité de l'intégrale.

<u>Illustration</u> :



(Changer a et b par c et d)

Exemples :

- Soit f une fonction constante sur un intervalle $[0;1]$. Quelle doit être sa valeur pour que f soit une densité ? La loi associée à cette densité s'appelle la ***loi uniforme*** sur $[0;1]$.
- Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 3e^{-3t}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$. La loi associée à cette densité s'appelle la ***loi exponentielle de paramètre 3***.

- Déterminer un réel k de manière à ce que la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x + k$ soit une densité de probabilité sur $[0;1]$.

Définition :

Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I. J et K désignent deux sous-intervalles de I tel que $P(K) \neq 0$. La ***probabilité conditionnelle de J sachant K*** est définie par :

$$P_K(J) = \frac{P(K \cap J)}{P(K)}.$$

Définition :

Soit P une loi de probabilité sur I de densité f. On dit qu'une variable aléatoire X, à valeurs dans I, suit une loi de probabilité P lorsque pour tout sous intervalle $[c;d]$ de I, on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)dt$$

Exemples :

- Si X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0;1]$, alors :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d dt = d - c.$$

Ainsi si X suit une loi uniforme sur $[0;1]$, alors la probabilité d'un sous-intervalle J est donnée par $\text{longueur de } J$

- Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 3 sur $\mathbb{R}$, alors $P(0 \leq X \leq x) = \int_0^x 3e^{-3t}dt = 1 - e^{-3x}$ et par complémentarité :

$$P(X \geq x) = 1 - P(0 \leq X < x) = e^{-3x}$$

2) Loi uniforme

R p 258 et D p 254 : Pté + Ex

Définition :

On appelle ***loi uniforme sur l'intervalle*** $[a;b]$ la loi de probabilité continue sur I dont la densité est une fonction constante sur $[a;b]$.

Propriété :

La densité d'une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$.

Théorème :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a;b]$. Alors, pour tout $c, d \in [a;b]$ on a : $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$ et $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Preuve :

Exemple : la loi uniforme sur $[0;1]$ déjà étudiée plus haut.

Exercices : n° 53-54

Dans la journée, un bus passe toutes les 6 minutes à la station n°14. Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0;6]$. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

3) Loi exponentielle

Définition + Pté + Ex +

Activité :

On suppose que la durée de vie Y d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre $0{,}1$.

a. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.
b. On sait qu'une voiture a déjà duré 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
c. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse 2 ans.

On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de l'âge. On dit que Y est une ***loi de durée de vie sans vieillissement***.

VII. Adéquation à une loi équirépartie

Activité 8 : Adéquation à une loi équirépartie

On présente le problème aux élèves, sans leur distribuer la feuille. On écoute leur suggestion pour le résoudre. Au fur et à mesure, on les fait réfléchir sur les questions qui se posent, etc. Les graphiques sont projetés au tableau, les élèves ne notent rien, sf pê les calculs sur le cahier d'exo. A la fin, on leur distribue la feuille récapitulatrice.

Exercices : 4 p 260 + feuille exo speciale