Chapitre 11 : Le Calcul Intégral

Dans tout le chapitre, on munit un plan P d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

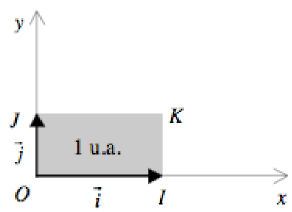
I. Intégrale d'une fonction continue positive sur un segment

1) Préliminaires

Définition :

On définit les points I,J et K tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$, et $\overrightarrow{OK}=\vec{i}+\vec{j}$.

On appelle ***unité d'aire*** (u.a.), l'unité de mesures des aires telles que $Aire(OIKJ)=1\text{ u.a}$



Exemple : si $OI=3\text{ cm}$ et $OJ=2\text{ cm}$ alors $1\text{ u.a}\equiv 6\text{ cm}^2$

Définition (à voir …) :

Une fonction ***continue par morceaux*** sur un intervalle I est une fonction continue sur I sauf peut-être en un nombre fini de points.

Remarque : Autrement dit, elle est continue sur I sauf en des points isolés que l'on peut compter.

Exemple : les fonctions en escalier sont continues par morceaux.

Définition (à voir …) :

Un ***segment*** est un intervalle fermé borné.

2) Aire située sous la courbe

Activité 1 à simplifier.

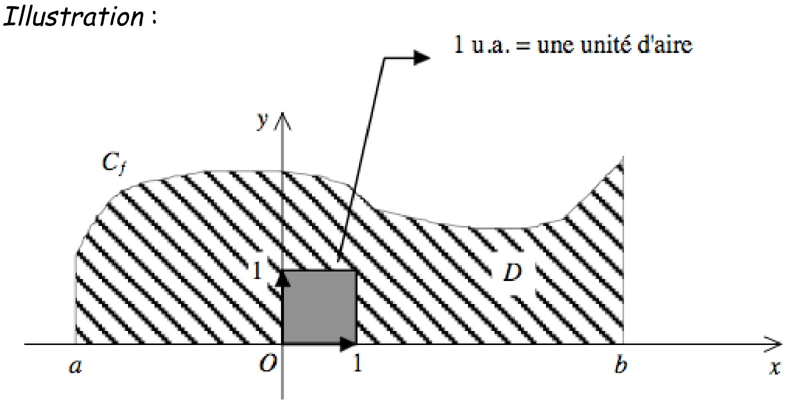
Définition :

Soient a et b deux réels avec $a\le b$, et f une fonction continue (ou continue par morceaux) et positive sur le segment $[a;b]$.

On appelle ***intégrale de*** f ***de*** a ***à*** b l'aire, exprimée en u.a, du domaine D délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.. On note cette quantité $\int_a^b f(x)dx$.

Les réels a et b s'appellent les ***bornes*** de l'intégrale.

Illustration :



L'aire de D est de mesure FINIE. En effet, f est continue sur le segment $[a,b]$ donc majorée. Il existe donc un rectangle contenant D.

Remarques :

- Communément on parle d'aire située sous la courbe.
- La variable x est dite « muette ». Elle peut être notée par toute autre lettre $\left(\int_a^b f(t)dt\right)$. Le symbole dx pour l'instant n'a d'autre rôle à votre niveau que de préciser quelle est la variable.
- Pour tout a, $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Exercice : n°12 p 206 + calculer l'intégrale $\int_{-2}^{5} 5dx$.

II. Extension aux fonctions de signe quelconque

Dans cette partie, on considère a et b deux réels avec $a \leq b$, et f une fonction continue (ou continue par morceaux) sur le segment $[a;b]$.

Définition :

Si f une fonction négative sur le segment $[a;b]$, on appelle ***intégrale de*** f ***de*** a ***à*** b l'opposé de l'aire, exprimée en u.a, du domaine D délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

On note encore cette quantité $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple : calculer les intégrales $\int_{-2}^{5} -5dx$, $\int_0^2 (-x)dx$ et $\int_0^1 (-x^2)dx$.

Définition :

Si f une fonction de signe quelconque sur le segment $[a;b]$, on appelle ***intégrale de*** f ***de*** a ***à*** b l'aire, exprimée en u.a, du domaine D délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, comptée :

- Positivement lorsque la courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses
- Négativement lorsque la courbe de f est en dessous de l'axe des abscisses

On note encore cette quantité $\int_a^b f(x)dx$.

Illustration : p 193 à modifier légèrement. On a $\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$.

Remarque : Il ne s'agit donc plus de l'aire du domaine colorié où tout se compte en positif. On parle d'aire ***algébrique***.

Exemple : Calculer $I = \int_2^5 (x-3)dx$. Après calcul on obtient $I = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$.
Exercices : n°15-16 p 206.
À l'aide de la calculatrice, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. En déduire les valeurs des intégrales $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

Trouver la valeur de $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Définition :

La valeur moyenne de la fonction f sur le segment $[a;b]$ est le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Exemple : Donner la valeur moyenne sur $[0;1]$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

Illustration : p 192
La valeur moyenne est donc la valeur de la fonction constante ayant la même intégrale que la fonction f de a à b.

Exercice : n°18 p 207

III. Propriétés de l'intégrale

Dans cette partie, on considère deux fonctions f et g continues sur un intervalle I ainsi que deux réels a et b de I avec $a \leq b$.

Relation de Chasles :

Soit . Alors $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Preuve : commentaires rapides dans le cas $a \leq b \leq c$ ou plus tard avec les primitives.

Corollaire :

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Autrement dit, permuter les bornes de l'intégrale change le signe de celle-ci.

Preuve : $\int_b^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$

Linéarité :

On a $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Pour tout réel k on a $\int_a^b k.f(t)dt = k\int_a^b f(t)dt$

Preuve : Rapide commentaire ou plus tard n°60 p 212 (avec les primitives)

Exercice : en utilisant le fait que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$, calculer $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-3\cos x - 2\sin x)dx$.

Positivité :

Si f est positive sur $[a;b]$ alors $\int_b^a f(x)dx \geq 0$.

Preuve : ceci vient de la définition de l'intégrale d'une fonction positive, comme une aire.

Remarques :

- Il faut impérativement vérifier $a \leq b$ car $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- La réciproque est fausse (cf exemple $I = \int_2^5 (x-3)dx = \frac{3}{2}$)

Ordre :

Si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors $\int_b^a f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx$

Preuve : si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors $g - f \geq 0$ sur $[a;b]$. De plus $g - f$ est continue sur $[a;b]$. On applique la propriété de la positivité, on obtient $\int_b^a (g-f)(x)dx \geq 0$. Par linéarité de l'intégrale, on a $\int_b^a g(x)dx - \int_b^a f(x)dx \geq 0$ ce qui équivaut à $\int_b^a f(x)dx \leq \int_b^a g(x)dx$.

Illustration : p 196

Lorsque f et g sont positives, cela traduit le fait que l'aire du domaine situé sous la courbe de g est plus grande que celle située sous la courbe de f.

Inégalité de la moyenne :

S'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a;b]$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Preuve : Pour tout $x \in [a;b]$, on a $m \leq f(x) \leq M$. Comme l'intégrale conserve l'ordre on a : $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$, ce qui donne le résultat.

Remarques :

- S'il existe un M tels que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|$
- Ceci donne aussi que la valeur moyenne de f est entre m et M.

Illustration : p 198
Lorsque f est positive, cela traduit le fait que l'aire sous la courbe est comprise entre les aires de deux rectangles de hauteurs m et M.

Exemple : pour tout réel x, $-1 \leq \sin x \leq 1$. Alors $\pi - 43 \leq \int_\pi^{43} \sin x dx \leq 43 - \pi$.

IV. Intégrales et Primitives

Exemple fondamentale : la quadrature de l'hyperbole (feuille à trous à distribuer) ou plus tard p 190 (pour faire le lien avec les primitives).

V. Intégration par parties

VI. Calcul de surface et de volume

1) Surface située entre deux courbes

Propriété :

Soient f et g deux fonctions continues et définies sur un segment $[a;b]$. On suppose que : $0 \leq g \leq f$ sur ce segment. Alors l'aire du domaine D défini par :

$$D = \{M(x;y) \in P; a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

est donné en u.a par : $$\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt$$

Preuve : faire un schéma illustratif

Exemple : Sur $[0;1]$, on prend f et g définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. L'aire du dommaine D est donné par : $Aire(D) = \int_0^1 tdt - \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$