Chapitre 10 : La fonction logarithme népérien

Rappel oral : Nous avons vu dans le chapitre sur la fonction exponentielle que :

« Pour tout réel $k > 0$, il existe un unique réel x tel que $e^x = k$.
Ce nombre est appelé logarithme népérien de k et noté $\ln k$. »

I. Définition et propriétés

1) Fonction réciproque de l'exponentielle

Définition :

On appelle ***fonction logarithme népérien*** la fonction, notée $\ln$, qui à tout $x > 0$ associe l'unique solution de l'équation $e^t = x$ d'inconnue t. Ainsi la fonction $\ln$ est définie par :

$$\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

La fonction $\ln$ est appelée *fonction réciproque* de la fonction exp.

Remarques :

- Comme $x = e^t > 0$, $\ln x$ n'a de sens que si $x > 0$.
- Par définition on a donc : $e^{\ln x} = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\ln e^x = x$ pour tout $x > 0$.
- On a également $\ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$
- Pour tous réels a et b strictement positifs $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- Sur la calculatrice, montrer la touche.

Exercices :

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(x+3)$ et $g(x) = \ln(x^2 - x - 2)$
2) Simplifications : n°**50**-51 p 150
3) Résolutions : n°**52-53**-54 p 150

2) Propriétés algébriques

Théorème : Relation fonctionnelle

La fonction $\ln$ transforme les produits en sommes :

Pour tous réels a et b strictement positifs : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Preuve : L'exponentielle transforme les sommes en produits, donc $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab$.
D'où $\ln ab = \ln a + \ln b$

Remarque : sur l'argument d'un nombre complexe.

Corollaire :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln\frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(a^n\right) = n\ln a \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

$$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$$

Preuve : D'après le théorème $\ln\frac{1}{b} + \ln b = \ln 1 = 0$. D'où $\ln\frac{1}{b} = -\ln b$.

De même, $\ln\frac{a}{b} + \ln b = \ln a$, d'où $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

Si $n \geq 0$, une récurrence immédiate donne $\ln a^n = n\ln a$.

Si $n < 0$ alors $\ln\left(a^n\right) = \ln\frac{1}{a^{-n}} = -\ln\left(a^{-n}\right)$. Comme $-n > 0$ on a $\ln\left(a^{-n}\right) = -n\ln a$.

D'où $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.

Comme $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\sqrt{a}\right) = 2\ln\sqrt{a}$, on a $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Exercices : Ecrire les réels suivants à l'aide de ln2 et ln3 : $A = \ln 144$ et $B = \ln 81 + \ln\left(3\sqrt{3}\right)$

+ n°14-**15** p 147 + n°34-**35**-36-37 p 149

II. Etude de la fonction ln

1) Dérivabilité

Théorème (admis) :

La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Théorème :

La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et pour tout réel strictement positif x on a :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

Etudions alors $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$ (on considère h assez proche de 0 pour que $\ln(x+h)$ OK.)

$\ln(x+h) - \ln x = \ln\frac{x+h}{x} = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$. On veut faire le changement de variable $H = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$:

- Comme la fonction $\ln$ est continue en 1, nous avons que $\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \ln 1 = 0$.

  Donc si $h \to 0$ alors $H \to 0$.
- De plus : $H = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \Leftrightarrow e^H = 1+\frac{h}{x}$ et donc $h = x(e^H - 1)$.

Nous pouvons alors écrire : $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{H\to 0}\frac{H}{x(e^H-1)}$.

Or $\lim_{H\to 0}\frac{e^H-1}{H}=\lim_{u\to 0}\frac{e^H-e^0}{H-0}=\exp'(0)=1$. Donc $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{x}$.

Remarques :

- L'approximation affine de la fonction $h\mapsto \ln(1+h)$ au voisinage de 0 est $\ln(1+h)\simeq h$.

(On applique la formule $f(x+h)\simeq f(x)+f'(x)h$, pour f dérivable sur V(x) et h proche de 0)

- La tangente à la courbe en $A(1;0)$ est la droite d'équation $y=x-1$

(On applique la formule $T: y=f'(a)(x-a)+f(a)$, pour f dérivable en a)

Exercices :

1) Dériver la fonction f définie par : $f(x)=3-x+\ln x$.
2) Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2-x-\frac{4}{x}$ telle que $F(1)=2$

<u>Corollaire</u>:

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Preuve : immédiat

Remarque : La croissance de ln se traduit par : $\ln x\le \ln y \Leftrightarrow x\le y$ pour tous x et y de $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercices :

1) Résoudre l'équation $\ln(x-2)=0$ et l'inéquation $\ln(x-2)\le 0$
2) Résoudre l'équation $\ln(2x+1)=\ln(3-x)$
3) n°18-**19**-20-**21**-**22**-**23** p 147 + 38 p 149 + n°**56**-**57** et 58 p 150

<u>Propriété</u> :

Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I et strictement positive, la fonction $f: x\mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I on a :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Preuve : $f'(x)=u'(x)\times\ln'[u(x)]=\frac{u'(x)}{u(x)}$

<u>Propriété</u> :

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I qui ne s'annule pas sur I. Une primitive sur I de la fonction $\frac{u'}{u}$ est la fonction : $\ln|u|$.

Preuve : Comme u est continue sur I et ne s'annule pas sur I, u ne change pas de signe sur I. Si $u>0$ sur I, alors $\ln'(|u|)=\ln'(u)=\frac{u'}{u}$. Si $u<0$ sur I, alors $\ln'(|u|)=\ln'(-u)=\frac{-u'}{-u}=\frac{u'}{u}$

Exercices : n°70 à 76 p 152 + N°82 p 153

2) Limites

Théorème :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$$

Remarque : la représentation graphique de $\ln$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Preuve : Soit $A \in \mathbb{R}^{+*}$. Or pour tout $x \geq e^A$ on a $\ln x \geq \ln e^A \Rightarrow \ln x \geq A$.
Donc pour tout réel A, il existe un réel (e^A) au delà duquel $\ln x \geq A$. D'où $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Par changement de variable on obtient alors $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = \lim_{X\to+\infty} \ln\frac{1}{X} = -\lim_{X\to+\infty} \ln X = -\infty$.

Théorème :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n \ln x = 0 \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

Preuve :

- On pose $X = \ln x$. Lorsque $x \to +\infty$, X aussi. Alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{X}{e^X}$. Or on sait que $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ d'où $\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- On se place dans le cas $n \geq 2$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\ln x}{x} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$ $\quad (n-1 \geq 1)$

- On pose $X = \frac{1}{x}$. Alors quand $x \overset{>}{\to} 0$, on a $X \to +\infty$.
  D'où $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x \ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln\frac{1}{X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{-\ln X}{X} = 0$

- On se place dans le cas $n \geq 2$: $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^n \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{n-1} x \ln x = 0$ car $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{n-1} = 0$.

- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln' 1 = \frac{1}{1} = 1$. Notons que l'on peut aussi écrire $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

Corollaire :

Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = 0$

Preuve : On note $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{P(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{a_n x^n} = 0$

Remarque : On retiendra que « En $+\infty$ et en 0, toute puissance de x l'emporte sur $\ln x$ »

Exercices :

1) Etudier la limite de $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ en $+\infty$. *Indication* : $\dfrac{\ln(x+1)}{x} = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \times \dfrac{x+1}{x}$...
2) Etudier la limite de $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$. *Indication* : $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.
3) Etudier la limite de $\sqrt{x}\ln x$ en 0^+.
4) Etudier la limite de $\ln x \times \ln(1-x)$ en 0^+. *Indication* : $x\ln x \times \dfrac{\ln(1-x)}{x}$
5) n°26-27 p147 + 39 à 42 p 149
6) Sur la calculatrice, tracer les courbes ………

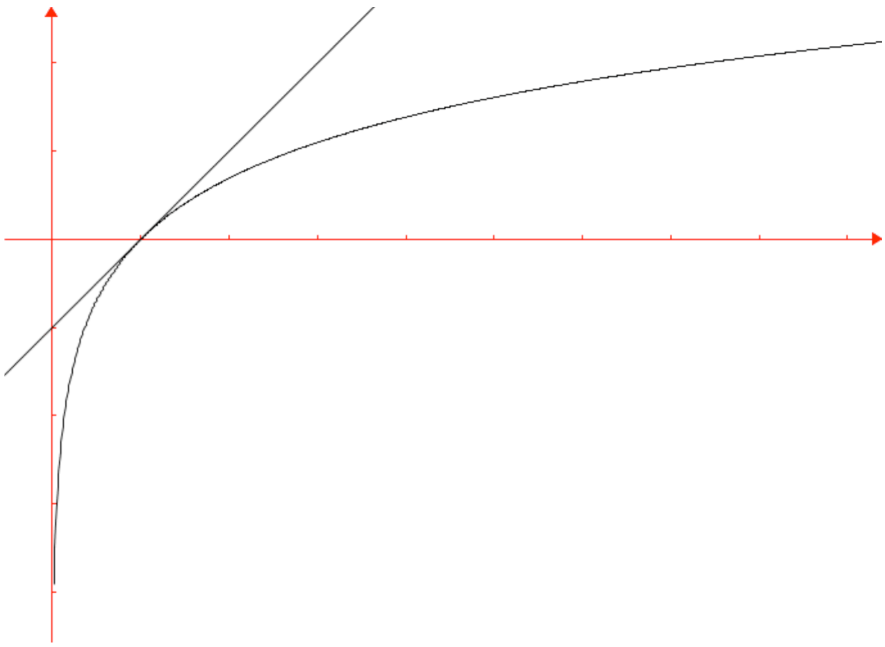
3) <u>Courbe représentative</u>

Tableau de Variations de la fonction $\ln$ **:**

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	||	$+$	1	$-$	
$\ln x$	|| $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

On rappelle que :

- La courbe représentative de ln admet l'axe des abscisses pour asymptote en 0.
- La droite d'équation $y = x - 1$ est la tangente à la courbe en $A(1;0)$
  - ➢ Visualiser la courbe et sa tangente sur les calculatrices.



Remarque orale : croissance rapide au départ, lente ensuite.

Lien avec la fonction exponentielle :

« Les courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite d'équation $\Delta : y = x$ »

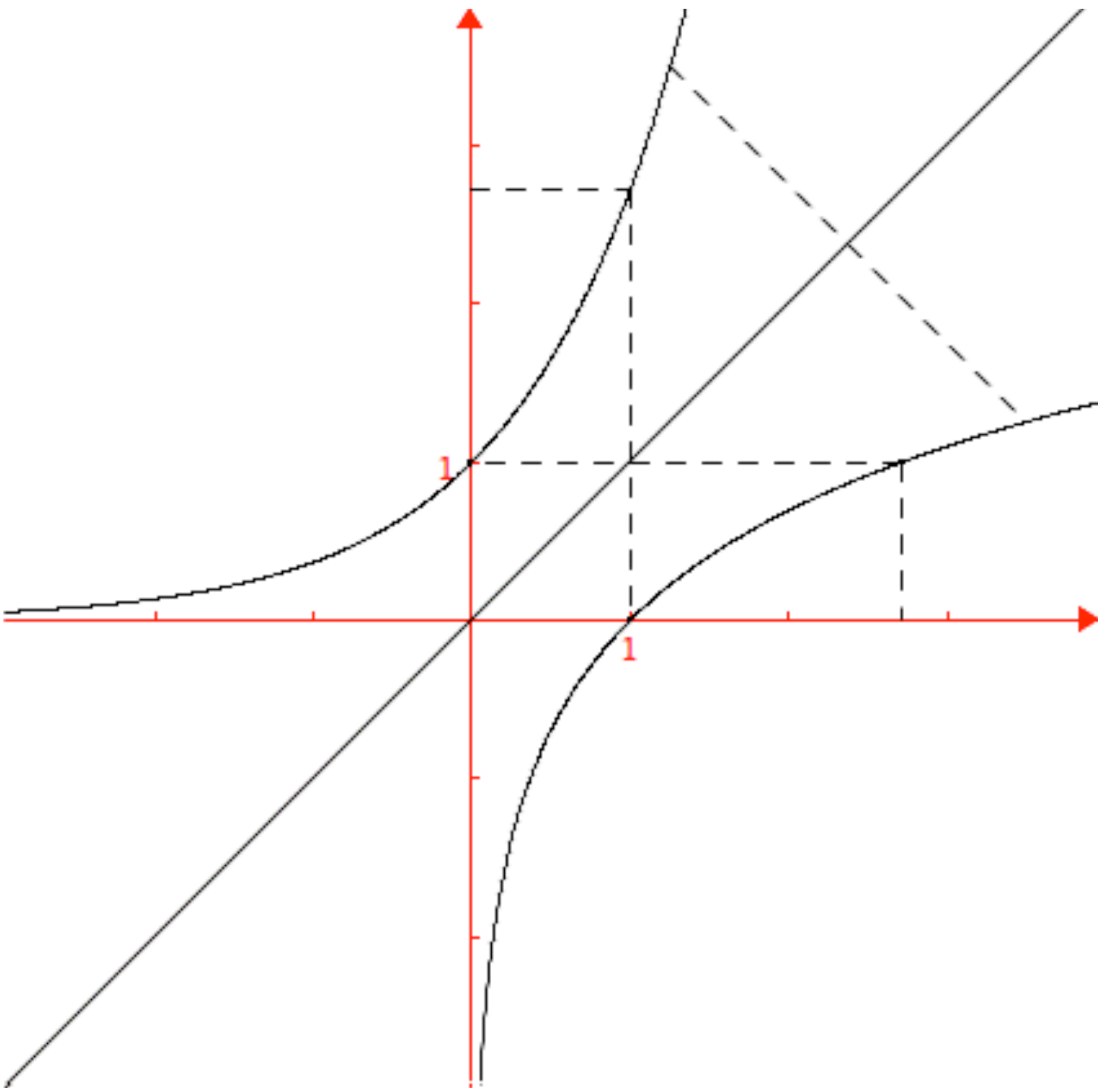
Preuve : Soit un réel x fixé et soit $M(x;y) \in C_{\exp}$. Alors $y = e^x$.

Soit $M'(x';y')$ le symétrique de $M(x;y)$ par rapport à Δ. Alors $x' = e^x$ et $y' = x$.

En effet $\overrightarrow{MM'}(x'-x;y'-y)$ est orthogonal à $\vec{u}(1;1)$, d'où $x'-x+y'-y=0$. De plus, le milieu de $[MM']$, de coordonnées $\left(\frac{x'+x}{2};\frac{y'+y}{2}\right)$ doit être sur Δ. On doit alors avoir $\frac{x'+x}{2} = \frac{y'+y}{2} \Leftrightarrow x'+x = y'+y$. On résout le système et on trouve $x' = y$ et $y' = x$.

Or $\ln x' = \ln\left(e^x\right) = x = y'$. On en déduit que $M'(x';\ln x') \in C_{\ln}$. Réciproquement, on montre que si $M'(x';y') \in C_{\ln}$ alors $M(x;y) \in C_{\exp}$.

- Compléter le graphique suivant :



Exercices : étude de fonction n° 43-66-105 p 149 à 156

III. Nouvelles fonctions

1) Les fonctions « logarithme »

Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On appelle ***logarithme de base*** a la fonction, notée $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, par :
$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Remarques :
- *Ces fonctions ont les mêmes règles de calculs que pour le logarithme népérien, elles sont aussi continues, dérivables sur* $\mathbb{R}^{+*}$.
- La fonction logarithme en base e correspond au logarithme népérien.

Exemple : Le plus grand nombre 1^er^ connu à ce jour ($2^{32582657}-1$) possède près de 10 millions de chiffres.

2) Les fonctions « exponentielle de base *a* »

Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On appelle ***fonction exponentielle de base*** a la fonction, notée $\exp_a$, définie sur $\mathbb{R}$, par : $\exp_a(x) = e^{x\ln a} = a^x$.

Application : La relation $\ln(a^n) = n\ln a$ pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{Z}$ se généralise :

$\ln(a^x) = \ln(e^{x\ln a}) = x\ln a$, pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : Pour $a = 1$ on a $\exp_1(x) = 1^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriétés :

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad \left(a^x\right)^y = a^{xy} \qquad a^x b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Preuves : *(faites par les élèves)*
- $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a}e^{y\ln a} = a^x a^y$
- $a^{x-y} = e^{(x-y)\ln a} = \dfrac{e^{x\ln a}}{e^{y\ln a}} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x} = e^{-x\ln a} = e^{x\ln\frac{1}{a}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = \dfrac{1}{a^x}$
- Posons $b = a^x = e^{x\ln a}$. Alors $\left(a^x\right)^y = b^y = e^{y\ln b} = e^{y\ln\left(e^{x\ln a}\right)} = e^{yx\ln a} = a^{xy}$
- $a^x b^x = e^{x\ln a}e^{x\ln b} = e^{x(\ln a+\ln b)} = e^{x\ln(ab)} = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \dfrac{e^{x\ln a}}{e^{x\ln b}} = e^{x(\ln a-\ln b)} = e^{x\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Exemples : $\dfrac{a^{-2,3}a^{6,4}}{a^{3,05}} = a^{1,05}$ $\quad \left(a^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = a^2$ $\quad \dfrac{\sqrt{a}}{a} = a^{-\frac{1}{2}}$ $\quad 3^{5,1}4^{-5,1} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{5,1}$

\+ n°87 A à E p 154

Contre-exemple : Où est l'erreur dans $-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\times\frac{1}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = 1$?

Réponse : on doit avoir $a > 0$ or ici $a = -1$!!

Théorème :

La fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$\exp_a'(x) = \left(a^x\right)' = (\ln a)a^x$$

Preuve : la fonction est de la forme e^u. On a $(\exp_a(x))' = \left(a^x\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = (\ln a)e^{x\ln a} = (\ln a)a^x$

Corollaire :

- Si $a > 1$ alors la fonction $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $0 < a < 1$ alors la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$ et si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$.

Proposition :

- Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$
- Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

Preuve : *(faites par les élèves)*

- Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = +\infty$

  De même $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = 0$
- Si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = 0$.

  De même $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = +\infty$

Tableaux de variations :

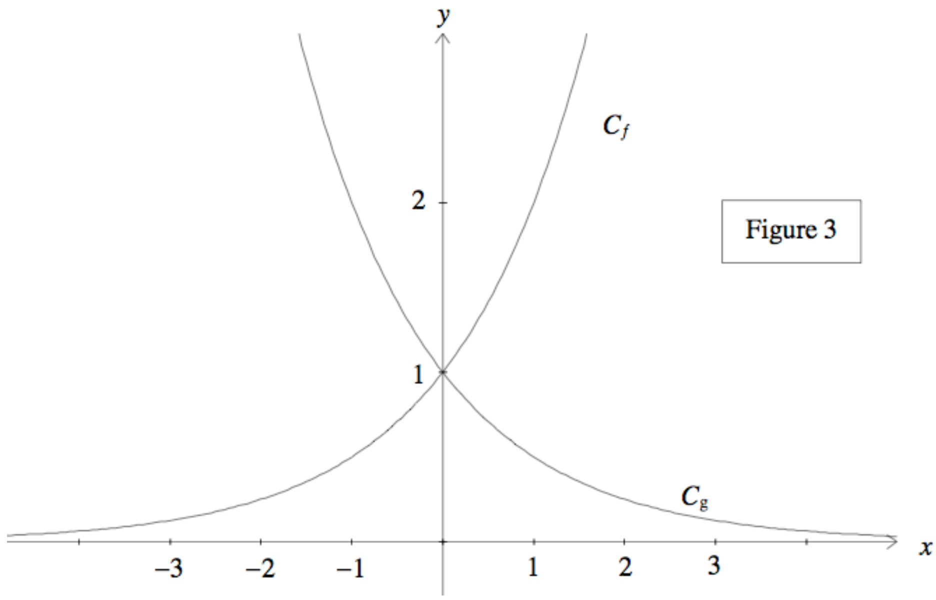
- Si $a > 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
a^x	0	1	a	$+\infty$

- Si $0 < a < 1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
a^x	$+\infty$	1	a	0

Sur les courbes représentatives ci-dessous, reconnaître les fonctions $\exp_2$ et $\exp_{\frac{1}{2}}$:



Exercices : Résoudre $5^x - 5^{1-x} = 4$, $2^{2x^2} \leq 2^{x+1}$, $3 \times 4^x + 2 = 2^x$ + n°98 p 155

Proposition : *(limite programme)*

- Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$
- Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{x} = -\infty$

Preuve : Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x \ln a}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x \ln a}}{x \ln a} \times \ln a = +\infty$

Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x \ln a}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x \ln a}}{x \ln a} \times \ln a = -\infty$

3) Les fonctions puissances

Définition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle ***fonction puissance*** la fonction f_α définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha .$$

Remarque : Dans la pratique, on étudie ces fonctions en écrivant $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
On note la nécessité de définir la fonction sur $]0;+\infty[$.

Exemple : $f_3(x) = x^3 = e^{3 \ln x}$

Théorème :

Les fonctions puissances sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et : $f_\alpha\,'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

Preuve : $f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ d'où $f_\alpha\,'(x) = \alpha \dfrac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \dfrac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Exemple : $f_\pi\,'(x) = \pi x^{\pi-1}$

Définition - propriété :

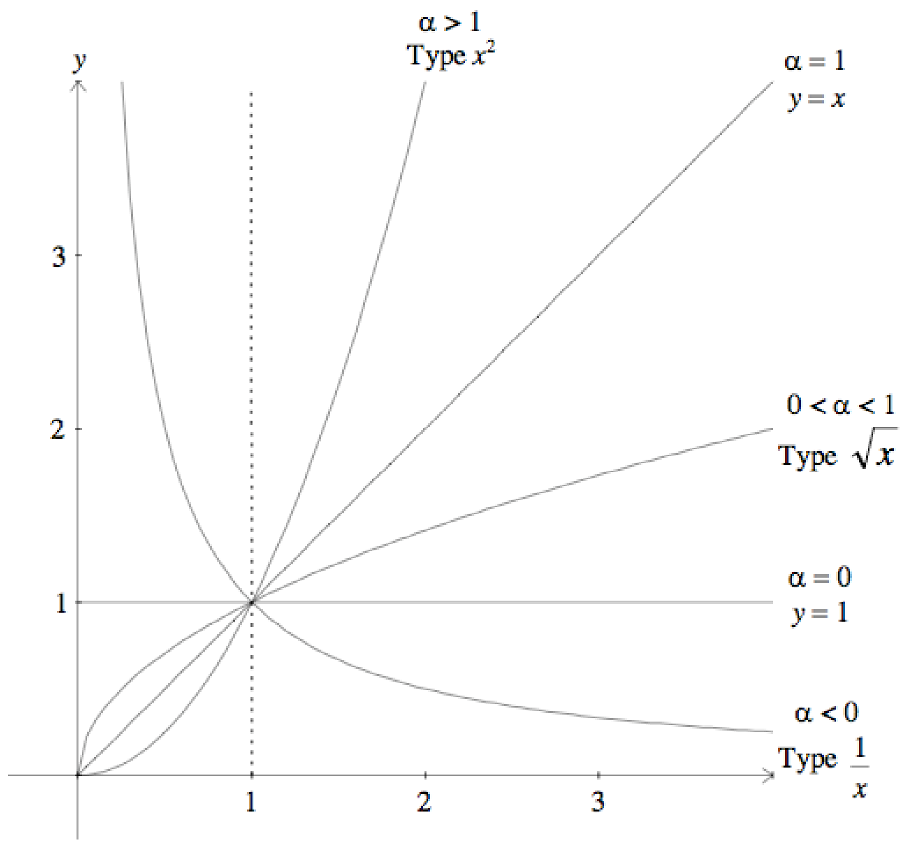
Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et n un entier naturel non nul. On appelle racine n-ième du nombre a, notée $\sqrt[n]{a}$, l'unique réel positif tel que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. On a $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Preuve :
La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante de $[0;+\infty[$ dans $[0;+\infty[$. D'après le corollaire du TVI, il existe donc une unique solution à l'équation $x^n = a$ dans $[0;+\infty[$ notée $\sqrt[n]{a}$ par définition. De plus, si $a = 0$ on a $b^n = 0 \Leftrightarrow b = 0$, si $a > 0$ on a $b^n = a \Leftrightarrow b^{n\times\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow b = a^{\frac{1}{n}}$

Exemple : $\sqrt[4]{16} = 2$, $4^{2,5} = 32$ $\left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 25$ $16^{\frac{3}{4}} = 8$ $81^{0,75} = 27$

Remarque : $x \mapsto e^{\frac{1}{n}\ln x}$ n'est pas définie en 0, mais $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{n}\ln x} = 0$. La fonction admet donc un prolongement par continuité en 0.

Voir la touche sur la calculatrice ? Visualiser sur la calculatrice les fonctions



Exercice : n° 87 fin – 88-95 p 155