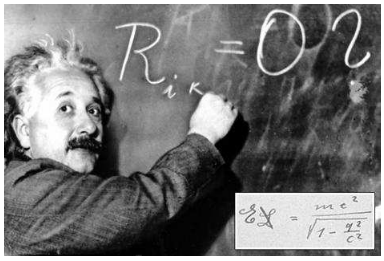
Table des matières

Leçon 2

Equations-Inéquations



I) Equation du premier degré

I-1 Equation du type $ax + b = c$

Définition 1 :

Une équation du premier degré à une inconnue est une équation du type $ax+b=c$ où a, b et c désignent des nombres réels connus et x une inconnue à déterminer.

Exemple :

$3x - 1 = 2$ est une égalité vraie dès lors que $3x = 3$ i.e $x = 1$.

Exemple :

$\frac{2-x}{4} = 1 \longleftrightarrow 2 - x = 4 \Longleftrightarrow -x = -6 \Longleftrightarrow x = 6$

I-2 Equation qui se ramène à $ax + b = c$

Quelques techniques, comme la factorisation et le développement permettent de transformer l'écriture d'une équation qui n'est en apparence pas une équation du premier degré en une équation du premier degré.

On les rappelle ici :

Identités Remarquables

Pour tous nombres a, b et c on a

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$a(b+c) = ab + ac$$

Exercice 1 **:**

Développer les expressions suivantes :

1. $(2x+3)^2$
2. $(x-5)^2$
3. $(3x+7)(3x-7)$
4. $(4x+3y)^2$
5. $(5x+3)^2 - 1$
6. $(6-x)^2 + 2(x-7)^2$

Exercice 2 :

Factoriser les expressions suivantes :

1. $x^2 - 10x + 25$
2. $x^2 - 16$
3. $4x^2 - 49$
4. $4x^2 + 4x + 1$
5. $(5x + 3)^2 - 1$
6. $(6 - x)^2 - (x - 7)^2$

Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $(2x - 5)(x + 3) = 0$
2. $x(x + 1) = 0$
3. $(x + 7)(4x - 8) = 0$
4. $(-3x + 6)(10 - x) = 0$

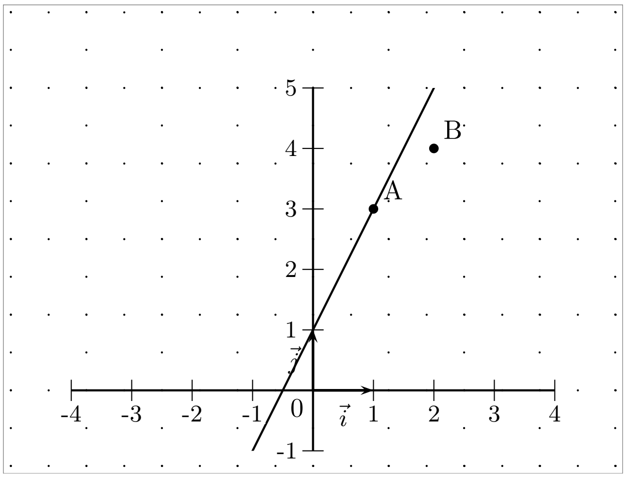
Exercice 4 :

1. Résoudre les équations suivantes en développant :
   (a) $x(x - 2) = x^2 + 5x - 7$
   (b) $(x - 1)(x + 2) = x^2$
2. Résoudre les équations suivantes en factorisant :
   (a) $x^2 - 81 = 0$
   (b) $x^2 - 7 = 0$
   (c) $(x + 3)^2 - 1 = 0$
   (d) $9x^2 - 6x + 1 = 0$
   (e) $4x^2 - 8x = 0$
   (f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

II) Inéquation du premier degré

II-1 Approche graphique : Les équations de droite

Voici une droite d d'équation $y = 2x + 1$.



Définition 2 :

Dire que d a pour équation $y = 2x + 1$, cela signifie que tout point $M \in d$ a des coordonnées qui vérifient l'équation de d. De plus si un point a des coordonnées qui vérifient l'équation de d, alors ce point est sur la droite et sinon il n'est pas sur la droite.

Exemple :

Le point $A(1; 3) \in d$ car $3 = 2 \times 1 + 1$. De plus le point $B(2; 4) \notin d$ car $4 \neq 2 \times 2 + 1$

Remarque : L'équation de la droite d n'est pas unique, en effet on peut très bien l'écrire $2y = 4x + 2$ ou encore $2y - 4y = 2$, ect...

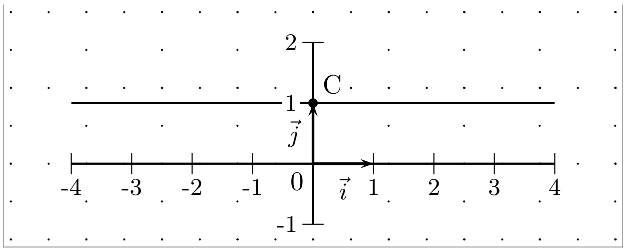
Théorème 1 :

Toute droite, non parallèle à l'axe des ordonnées, admet une équation unique de la forme $y = ax + b$. On dit que c'est l'équation réduite de la droite. a est appelé le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine de la droite.

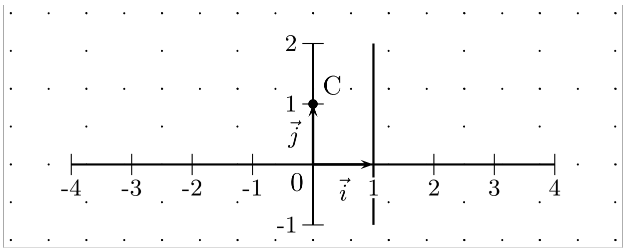
Exemple :

L'équation réduite de la droite d est donc : $y = 2x + 1$. En revanche $2y = 4x + 2$ n'est pas l'équation réduite de la droite ; de la même manière $2y - 4y = 2$ n'est pas l'équation réduite de d.

Remarque : La droite passant par le point $C(0; 1)$ et qui est parallèle à l'axe des abscisses a pour équation réduite $y = 0 \times x + 1$, i.e $y = 1$. Le coefficient directeur est 0 et l'ordonnée à l'origine est 1.



Remarque : La droite passant par C parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation différente ; tous les points ayant la même abscisse (1), son équation est $x = 1$. **Cette droite n'a donc pas de coefficient directeur ni d'ordonnée à l'origine**. *Elle n'admet pas d'équation réduite.*



Théorème 2 :

Toute droite admet une équation du type $ax + by = c$. On dit que c'est une équation générale, cette équation n'est pas unique, au contraire toute admet une infinté d'équations générales. Les nombres a ; b et c ne portent pas de nom particulier.

Remarque : On vient de voir que toutes les droites n'admettent pas d'équation réduite, en revanche elles admettent toutes une infinité d'équation générale.

Exemple :

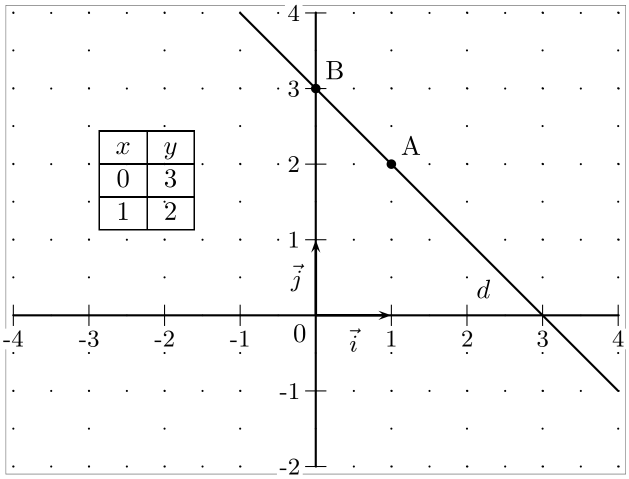
Les trois droites précédentes admettent respectivement comme équation générale :

1. $y - 2x = 2$
2. $y + 0x = 1$
3. $0y + x = 1$

II-1.1 Tracer une droite

<u>1$^{\text{ère}}$ **Méthode**</u> : Soit d la droite d'équation : $y = -x + 3$.

1. Pour tracer une droite il nous suffit de connaître deux points.
2. L'équation est une relation liant les coordonnées des points de la droite. Si on choisit pour x, par exemple, la valeur 0, on trouvera, à l'aide de l'équation la valeur de l'ordonnée y. On obtient le point B
3. On réitère ce processus une seconde fois, en choisissant cette fois-ci pour x la valeur 1. On obtient le point A.
4. Enfin on place les deux points obtenus et on les relie.



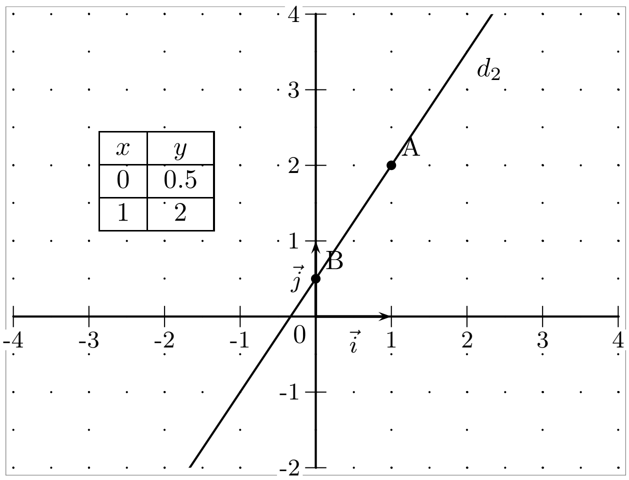
Remarque : On peut choisir n'importe quelles valeurs pour x, mais on s'arrange pour simplifier les calculs au maximum ; pour cette raison on choisit souvent les valeurs 0 et 1.

Exemple :

Soit d_2 la droite d'équation $2y - 3x = 1$

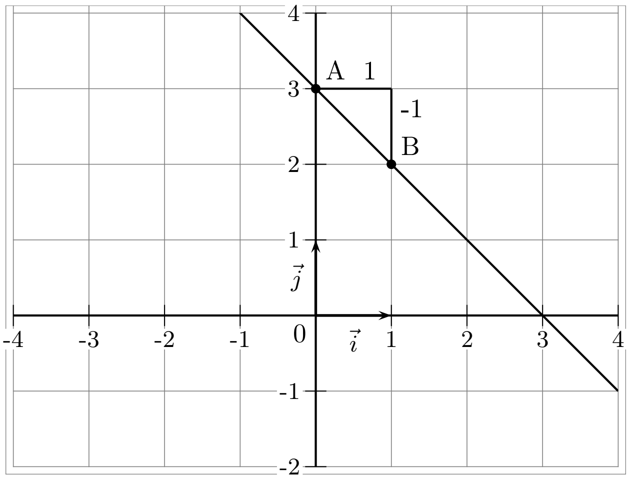
Si $x = 0$ alors $2y = 1 \iff y = \dfrac{1}{2}$

Si $x = 1$ alors $2y - 3 = 1 \iff 2y = 4 \iff y = 2$



2$^{\text{ème}}$ Méthode : Soit d la droite d'équation : $y = -x + 3$.

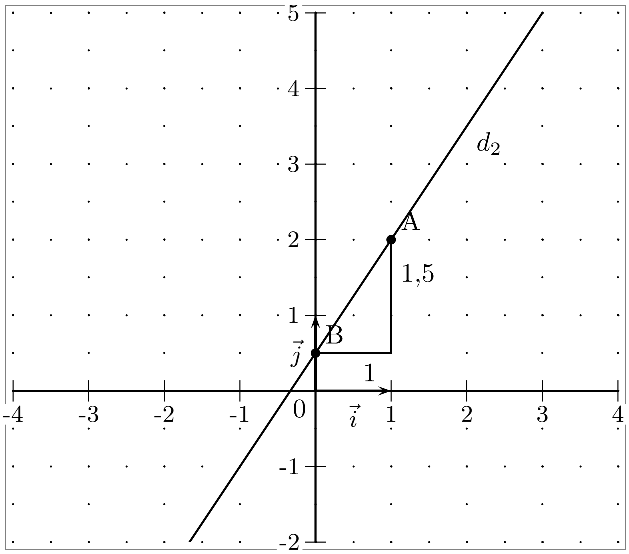
1. On se sert du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.
2. On place le point de coordonnée $B(0;3)$ (lorsque $x = 0$, $y = 3$). Quand x prend la valeur 0, y vaut toujours l'ordonnée à l'origine.
3. On place ensuite le point de coordonnée $A(1;2)$, obtenu comme expliqué sur le schéma suivant.



Exemple :

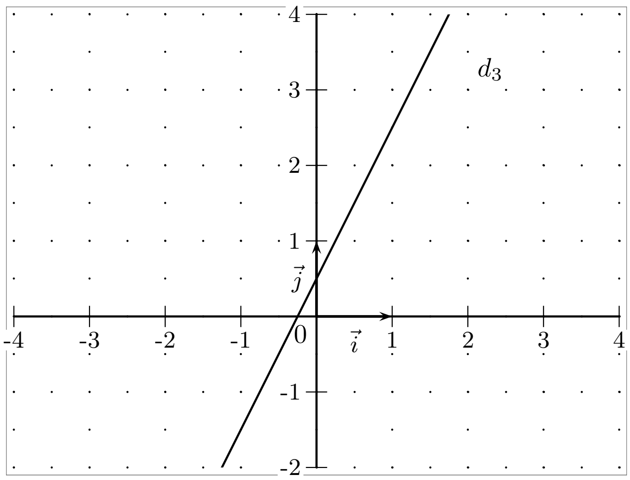
Soit d_2 la droite d'équation $2y - 3x = 1$
Comme on se sert du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine, on doit trouver l'équation réduite de d_2 :

$$2y - 3x = 1 \iff 2y = 3x + 1 \iff y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$



II-1.2 Trouver l'équation d'une droite

On se donne une droite, d_3, et le but est de déterminer son équation.



<u>$1^{\text{ère}}$ **Méthode**</u> :

- d_3 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc d_3 admet une équation réduite de la forme $y = ax + b$
- On cherche l'ordonnée du point de la droite dont l'abscisse est 0.
  Ici ce point a pour ordonnée $0,5$. En conclusion l'équation réduite de d_3 est $y = ax + 0,5$
- On cherche l'ordonnée du point de la droite dont l'abscisse est 1.
  Ici ce point a pour ordonnée $2,5$. On effectue la différence entre le l'ordonnée de ce point et celle du précédent : $2,5 - 0,5 = 2$. En conclusion léquation réduite de d_3 est $y = 2x + 0,5$

<u>$2^{\text{ème}}$ **Méthode**</u> :

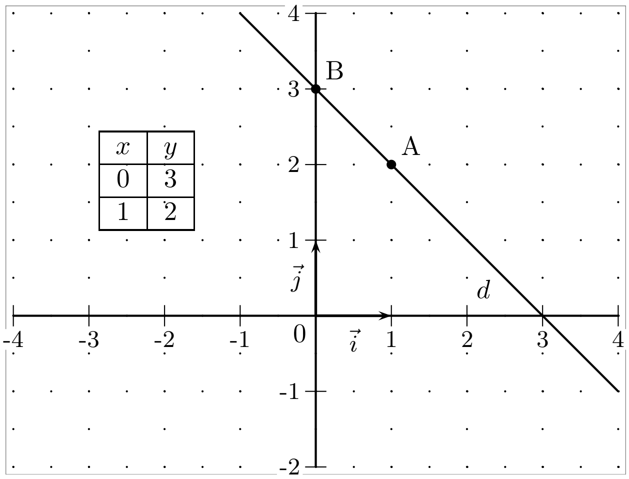
- d_3 n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc d_3 admet une équation réduite de la forme $y = ax + b$
- On cherche les coordonnées de deux points de la droite. Par exemple $A(0; 0.5)$ et $B(1; 2,5)$.
- le coefficient directeur s'obtient en appliquant la formule :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2,5 - 2}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$

  L'équation réduite ne présente plus qu'une inconnue, b : $y = 2x + b$
- On remplace x et y par les coordonnées de A ou de B dans l'équation réduite afin de trouver la valeur de b :
  Avec les coordonnées de A $0,5 = 2 \times 0 + b \Longleftrightarrow b = 0.5$
  Avec les coordonnées de B : $2,5 = 2 \times 1 + b \Longleftrightarrow b = 2,5 - 2 = 0,5$
  En conclusion l'équation réduite de d_3 est : $y = 2x + 0,5$

II-1.3 Signe de $ax+b$

Observons la représentation graphique de la droite $y = -\frac{2}{3}x + 1$



On en déduit automatiquement le signe de $-\frac{2}{3}x+1$ en fonction des valeurs de x. Cette expression vaut 0 si $x = 3$, elle est négative dès lors que $x > 3$ et positive sinon, d'où :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-\frac{2}{3}x+1$		$+$	0	$-$	

II-2 Approche algébriste

On peut résoudre sans recours au graphique l'inéquation $-3x+1>0 \iff -3x > -1 \iff x < \frac{1}{3}$, ce qui permet de conclure que l'expression $-3x+1>0$ dès lors que $x > \frac{1}{3}$. On résume cela par :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	0	$-$	

De manière générale :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		du signe de -a	0	du signe de a	

II-3 Application : Signe d'un produit et d'un quotient

> ***Rappel***
> Le signe d'un produit dépend du signe de chaque facteur, le signe d'un quotient dépend des signes du numérateur et du dénominateur.

Exercice 5 :

1. Résoudre l'inéquation $(x+3)(7-2x) \geq 0$
2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-5}{x+7} < 0$
3. Prolongement éventuel : Résoudre les inéquations suivantes :

   (a) $x(x+5)(3x-8) > 0$

   (b) $(x-4)^2 < (6x+7)^2$

   (c) $\dfrac{x+6}{x^2-25} \leq 0$

   (d) $\dfrac{x^2-4}{x^2-9x} \geq 0$

III) Systèmes d'équations

1. **Méthode par substitution :** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$
   (a) Exprimer à l'aide de la première équation y en fonction de x.
   (b) Remplacer dans la deuxième équation y par l'expression obtenue.
   (c) Déterminer x, puis en déduire y.
   (d) Écrire l'ensemble des solutions

   Remarques :
   - Les rôles de x et de y sont symétriques (on peut exprimer x en fonction de y à la 1^{re} étape)
   - Les rôles des équations sont symétriques (on peut utiliser la 2^{me} équation dans la 1^{re} étape)

2. **Méthode par combinaison linéaire :** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + 7y = -6 \end{cases}$
   (a) Multiplier la 1^{re} et la 2^{me} ligne par des nombres appropriés afin de faire apparaître des coefficients opposés devant le x
   (b) Additionner les deux lignes
   (c) On a obtenu une seule équation à d'inconnue y. Déterminer y
   (d) Remplacer y par sa valeur trouvée dans l'une des équations
   (e) On a obtenu une seule équation d'inconnue x. Déterminer x
   (f) Écrire l'ensemble des solutions.

   Remarques :
   - Après avoir trouver x, on peut refaire une combinaison linéaire pour trouver y
   - Les rôles de x et de y sont symétriques (on peut travailler sur les coefficients de y)

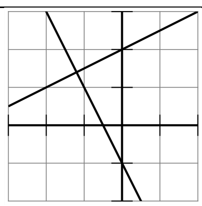
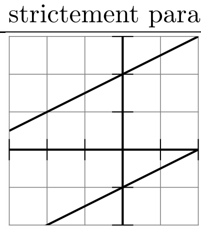
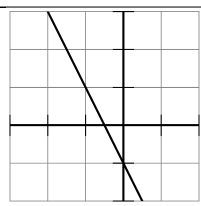
3. **Méthode graphique** On se propose de résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -13 \end{cases}$

   À chaque équation du système, il est possible d'associer une droite. Graphiquement, les éventuels couples solutions sont les coordonnées des points communs à ces droites.
   (a) Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tracer les droites appropriées
   (b) Déterminer alors graphiquement l'ensemble solution du système donné.

   Remarque : On peut anticiper le nombre de couples solutions d'un système du type : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x - b'y = c' \end{cases}$
   - Si $ab' - a'b \neq 0$, on sait que les droites associées ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un unique point de coordonnées $(x_0; y_0)$. Le système admet **un unique couple solution**.
   - Si $ab' - a'b = 0$ alors on sait que les droites associées sont parallèles. Soit elles sont strictement parallèles (a, b et c non proportionnels à a', b', et c') et le système n'admet **aucun couple solution** ; soit elles sont confondues (a, b et c proportionnels à a', b', et c') et le sytème admet une **infinité de couples solutions** (ceux qui vérifient l'équation de la droite)

Définition 3 :

On appelle le nombre $ab' - a'b$ le déterminant du système d'équations, car il permet de déterminer à l'avance le nombre de solutions du système.

Déterminant $\neq 0$	Déterminant $= 0$	
Les droites associées sont sécantes	Les droites associées sont strictement parallèles	Les droites associées sont confondues
		
Le système admet une unique solution	Le système n'admet aucune solution	Le système admet une infinité de solutions

Exercice 6 :

La société Net Plus a mis en vente sur son site internet deux nouveaux téléphones portables.
Au cours du mois de juin, elle a vendu 25 modèles A et 45 modèles B pour un chiffre d'affaires de 6179 €.
Au cours du mois suivant, les ventes du modèle A ont progressé de 20% mais celles du modèle B ont chuté d'un tiers, pour un chiffre d'affaires ce mois-là de 4906 €. Déterminer le prix de chaque modèle.

Exercice 7 :

Une entreprise de travaux publics a dû acheter des gaines et des câbles pour réaliser le câblage informatique d'un lycée. Le chantier s'est déroulé en deux phases.
Lors de la première, elle a posé 200m de gaine et 600m de câble pour un coût de 660 €.
Lors de la deuxième phase, elle a posé 300m de gaine et 1200m de câble pour un coût de 1 155 €.

1. Les coût n'ont pas évolué entre les deux phases. Quels sont les prix d'un mètre de câble et d'un mètre de gaine ?
2. Les coût ont augmenté de 10% entre les deux phases. Quels étaient les prix d'un mètre de câble et d'un mètre de gaine lors de la première phase ?

Exercice 8 :

Il faut nettoyer les allées d'un espace vert. La remorque tractée du jardinier pèse à vide 50kg. Quand elle est remplie de feuilles, elle pèse 55kg, mais quand elle est remplie de glands, elle pèse 80kg.
Le jardinier a rempli et vidé 10 remorques, ce qui représente une masse totale de 112.5kg de déchets verts.
Quelles sont les masses respectives, exprimées en kg, de feuilles et de glands qu'il a ramassés ?

Exercice 9 :

Les habitants du square de Beauvillage ont aperçu dimanche 7 cigognes, de smerles et des pies. Ils ont dénombré en tout 32 oiseaux. Le lendemain, les cigognes étaient parties, mais les habitants ont compté deux fois plus de merles et trois fois moins de pies que la veille. Ils ont vu en tout 25 oiseaux.
Combien y avait-il de merles et de pies dans le square de Beauvillage ce dimanche ?